А.Д.АЛЕКСАНДРОВ А.Л.ВЕРНЕР В.И.РЫЖИК

ГЕОМЕТРИЯ

8

А.Д.АЛЕКСАНДРОВ
А.Л.ВЕРНЕР
В.И.РЫЖИК

ГЕОМЕТРИЯ

ПРОБНЫЙ УЧЕБНИК
ДЛЯ 8 КЛАССА
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Рекомендовано
Главным управлением школ
Министерства просвещения
СССР

МОСКВА ПРОСВЕЩЕНИЕ 1986

ББК 22.151я72
А46

Условные обозначения

■ — окончание доказательства утверждения
* — необязательный материал

А $\frac{4306020400-508}{103(03)-86}$ инф. письмо — 86

ГЛАВА VI.

ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ

§ 29. ПРОЕКЦИИ И КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

29.1. Векторы и действия с ними

В курсе VII класса вы начали изучать векторы и действия с ними. В VIII классе это изучение будет продолжаться в математике и физике. Сначала вспомним основные сведения о векторах из курса VII класса.

Векторы — это такие величины, которые имеют численное значение и направление.

Численное значение вектора называется его модулем (или длиной).

Ненулевые векторы изображаются направленными отрезками (рис. 1). Направленные отрезки тоже называются векторами.

Особо выделяется нуль-вектор: $\vec{0}$. Его длина равна нулю, а направления он не имеет. Этот вектор изображается точкой.

Равные векторы — это такие векторы, которые имеют равные длины и одинаковые направления (рис. 2).

Отложить от данной точки вектор, равный данному,— значит построить направленный отрезок с началом в этой точке, изображающий данный вектор.

От любой данной точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Сумму двух векторов можно найти по правилу треугольника (рис. 3) или по правилу параллелограмма (рис. 4).

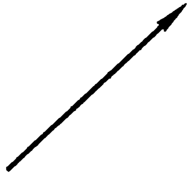


Рис. 1

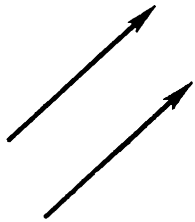


Рис. 2

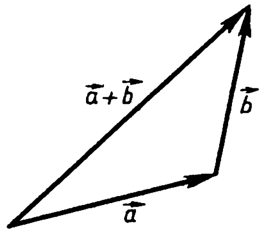


Рис. 3

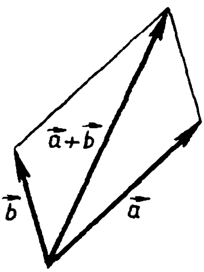


Рис 4

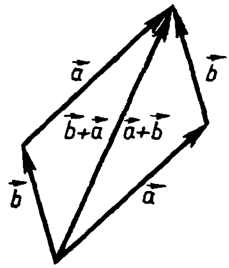


Рис 5

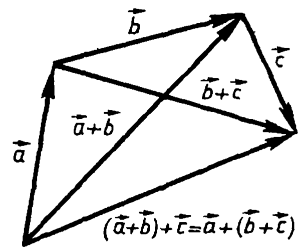


Рис 6

Основные свойства сложения векторов те же, что и сложения чисел.

1. Переместительность (коммутативность) сложения: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 5).

2. Сочетательность (ассоциативность) сложения: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 6)

3. Сложение векторов с нулевым вектором не изменяет данный вектор: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.

4. Для каждого вектора $\vec{a}$ имеется противоположный ему вектор, который обозначается $-\vec{a}$. Сумма противоположных векторов равна $\vec{0}$ (рис. 7).

Вычитание векторов — это операция, обратная сложению векторов. Вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$ — значит найти такой вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ даст вектор $\vec{a}$ (рис. 8). Чтобы вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, можно к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор $-\vec{b}$ (рис. 9).

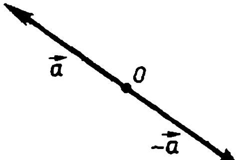


Рис 7

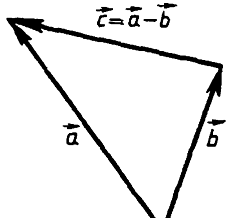


Рис 8

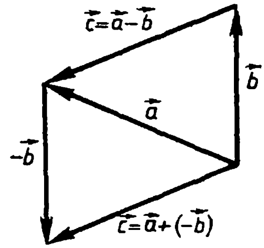


Рис 9

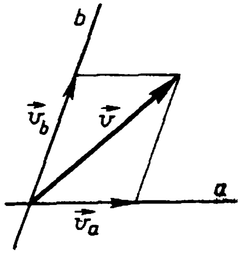


Рис 10

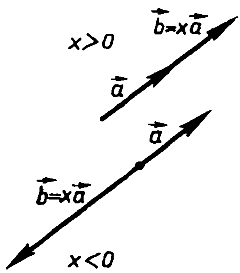


Рис 11

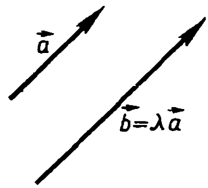


Рис 12

Другая операция, обратная сложению векторов,— разложение вектора на составляющие по двум прямым. Если две прямые пересекаются, то *каждый вектор на плоскости можно разложить на сумму двух векторов, лежащих на этих прямых, причем единственным образом* (рис 10). Полученные векторы-слагаемые называются составляющими данного вектора по данным прямым

Вы познакомились также и с умножением вектора на число. Чтобы умножить вектор $\vec{a}$ на число x, длину вектора ($|\vec{a}|$) умножают на $|x|$. Если $x > 0$, то вектор $x\vec{a}$ направлен одинаково с вектором $\vec{a}$; если $x < 0$, то вектор $x\vec{a}$ направлен противоположно вектору $\vec{a}$ (рис. 11). Если данный вектор нулевой или мы умножаем вектор на нуль, то вектор $x\vec{a}$ равен $\vec{0}$.

Основные свойства умножения вектора на число выражаются следующими равенствами:

$$x(y\vec{a}) = (xy)\vec{a}; \tag{1}$$

$$(x + y)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{b}; \tag{2}$$

$$x(\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}. \tag{3}$$

Эти равенства верны для любых чисел и векторов

Напомним еще признак параллельности векторов: *два вектора параллельны тогда и только тогда, когда один из них получается из другого умножением на некоторое число* (см. рис. 12). В частности, эти векторы могут лежать на одной прямой.

Сложение векторов и умножение вектора на число составляют основу векторной алгебры — раздела математики, изучающего векторы Векторная алгебра является одним из основных средств исследования в физике и в разных разделах математики. Например, в векторной форме записываются многие законы физики, в частности законы механики.

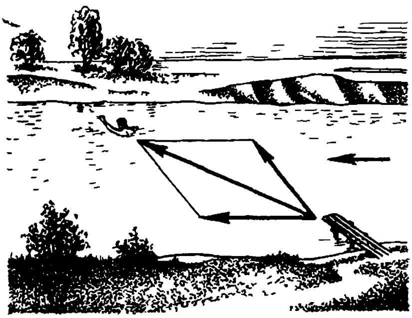


Рис 13

29.2. Проекция вектора на ось

При рассмотрении векторной величины нас может интересовать не столько она сама, сколько ее составляющая в некотором направлении. Например, когда вы хотите переплыть реку побыстрее, вам важна лишь перпендикулярная берегу реки составляющая той скорости, с которой вы плывете (рис. 13). Такую составляющую можно найти проектированием вектора скорости на направление, перпендикулярное берегу. А под проекцией вектора понимают скалярную величину, которую определяют следующим образом.

Пусть задана ось x. На этой оси выберем единичный вектор $\vec{e}$, направление которого совпадает с направлением оси x. (**Единичным** называется вектор, длина которого равна единице, т. е. $|\vec{e}| = 1$) Пусть вектор $\vec{v}$ отложен от некоторой точки A, так что $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ (рис. 14). Спроектируем точки A и B на ось x. Получим точки A_1 и B_1. Векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\vec{e}$ лежат на одной прямой. Поэтому (согласно признаку параллельности векторов) $\overrightarrow{A_1B_1} = v_x\vec{e}$. Число v_x называется проекцией вектора $\vec{v}$ на ось x. (Заметьте, что проекция вектора при заданной единице измерения — это число.)

Проекцию вектора на ось можно представить себе следующим образом. Из определения умножения вектора на число следует, что

$$|\overrightarrow{A_1B_1}| = |v_x|\,|\vec{e}| = |v_x|$$

(так как $|\vec{e}| = 1$). Поэтому $v_x = \pm|\overrightarrow{A_1B_1}| = \pm|A_1B_1|$. Значит, проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ — это длина отрезка A_1B_1 со знаком, причем $v_x = +|A_1B_1|$, если направление вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси x, и $v_x = -|A_1B_1|$, если не совпадает.

Именно как длину отрезка A_1B_1 со знаком, выбранным таким образом, определяют проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось x в курсе физики.

* Проекцию вектора на ось можно найти, если известны длина вектора и угол, который он образует с данной осью (т. е. с единичным вектором данной оси).

Л е м м а *(о проекции вектора на ось).* ***Проекция вектора на ось равна длине этого вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью.***

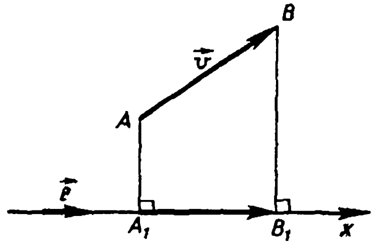


Рис 14

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть заданы вектор $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ и ось x с единичным вектором $\vec{e}$. Обозначим через φ угол между вектором $\vec{v}$ и осью x, т. е. угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{e}$. Если точка A не лежит на прямой x, то проведем через A прямую p, параллельную прямой x. Спроектируем точки A и B на прямые x и p. Получим прямоугольник A_1ACB_1 (рис. 15). Возможны такие случаи.

1) Угол φ острый. Тогда (рис. 15, *а*)

$$v_x = +\,|A_1B_1| = |AC| = |AB|\cos\varphi = |\vec{v}|\cos\varphi.$$

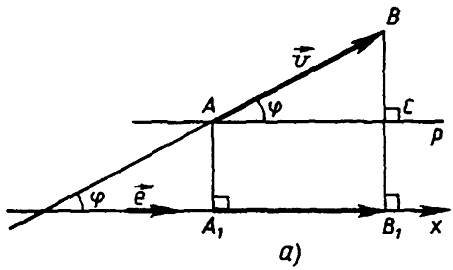
2) Угол φ тупой (рис. 15, *б*). Тогда

$$v_x = -\,|A_1B_1| = -\,|AC| = -\,|AB|\cos(180^\circ - \varphi) =$$
$$= |AB|\cos\varphi = |\vec{v}|\cos\varphi.$$

Итак, для первых двух случаев доказано, что

$$v_x = |\vec{v}|\cos\varphi. \qquad (4)$$

3) Если $\vec{v} = \vec{0}$ или $\varphi = 90^\circ$ (рис 15, *в*), то $A_1 = B_1$, $v_x = 0$ и равенство (4) тоже имеет место. Лемма полностью доказана.



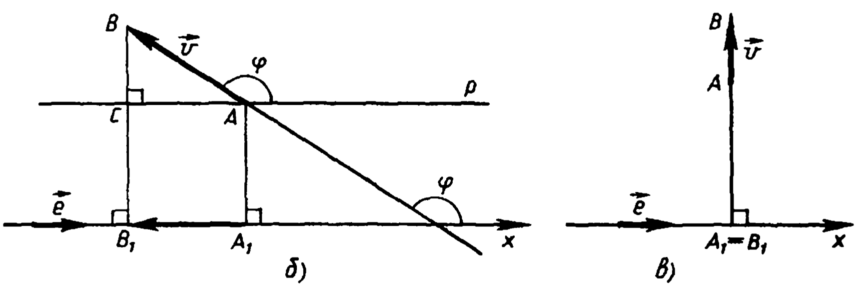


Рис 15

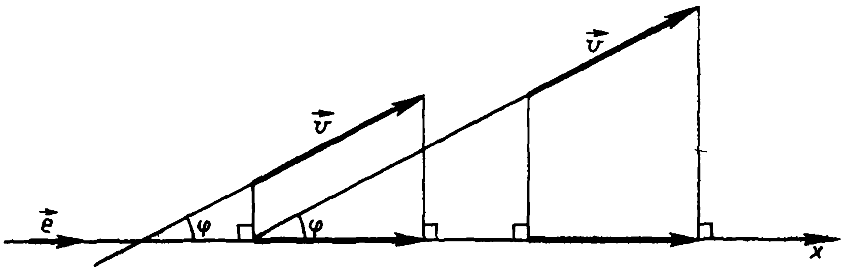


Рис. 16

Из этой леммы получаем

Следствие. ***Равные векторы имеют равные проекции на заданную ось.***

Действительно, из леммы следует, что проекция вектора на ось зависит лишь от длины вектора и угла, который он образует с осью. Равные же векторы имеют, во-первых, равные длины и, во-вторых, образуют с осью один и тот же угол (рис. 16). Следовательно, их проекции на ось равны.

Проекции векторов имеют два свойства.

1. *Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций этих векторов на ту же ось* (короче: *при сложении векторов их проекции складываются*).

2. *При умножении вектора на число его проекция умножается на то же число.*

Доказательство этих свойств мы получим в следующем пункте. А здесь мы лишь иллюстрируем эти свойства рисунками (рис. 17).

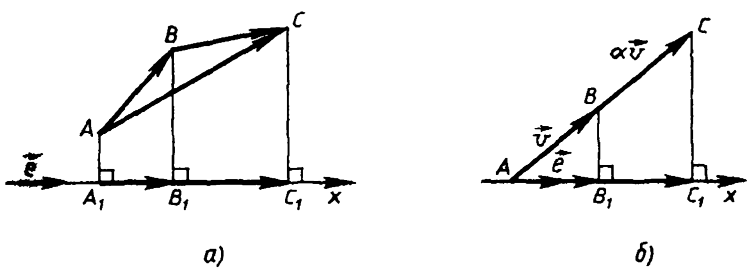


Рис. 17

В заключение приведем примеры, в которых важна проекция вектора.

Глядя на движущийся вдали предмет, например при астрономических наблюдениях за спутниками, планетами, звездами, мы видим не само его перемещение (точнее, составляющую перемещения), а проекцию перемещения на направление, перпендикулярное лучу зрения (рис. 18). Насколько же предмет удаляется от нас или, наоборот, приближается, показывает проекция на луч зрения. Знак проекции показывает удаление или приближение (считая, например, удаление положительным, а приближение отрицательным).

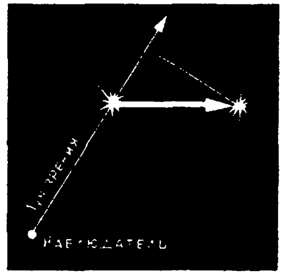


Рис 18

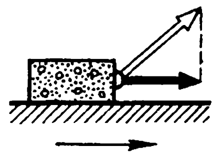


Рис. 19

Проекция вектора силы на данное направление показывает, насколько сила действует в данном направлении. Например, когда предмет тянут или толкают, важна проекция приложенной силы на направление движения (рис. 19). Точно так же при подъеме предмета важна подъемная сила — проекция приложенной силы на вертикальное направление.

Проекции скорости, силы и других векторных величин входят в целый ряд законов физики.

29.3. Координаты вектора

Вы знаете, что если на некоторой плоскости задана система координат (рис. 20), то каждой точке этой плоскости сопоставляется пара чисел — ее координаты в этой системе. Вы знаете также, что всегда можно решить и обратную задачу: если задана пара чисел x_0, y_0, то можно построить на координатной плоскости такую единственную точ-

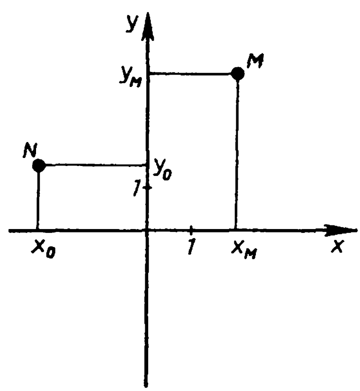


Рис. 20

ку, координатами которой будут данные числа x_0, y_0. Итак, задавать точки на координатной плоскости можно парами чисел — их координатами.

Сейчас мы решим аналогичные задачи для векторов и покажем, что векторы на координатной плоскости тоже можно задавать парами чисел — координатами векторов. При этом координатами векторов окажутся проекции векторов на координатные оси. Затем мы сможем установить связь между координатами векторов и координатами точек.

Теорема *(о координатном представлении вектора)*. ***Пусть на плоскости введена прямоугольная система координат с единичными векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ координатных осей x и y. Тогда каждый вектор $\vec{v}$ единственным образом представляется в виде***

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}. \tag{5}$$

При этом числа v_x и v_y являются проекциями вектора $\vec{v}$ на координатные оси x и y соответственно. (Числа v_x и v_y называются также **координатами вектора** $\vec{v}$ относительно векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$.)

Доказательство. Отложим вектор $\vec{v}$ от начала координат — точки O. Получим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$ (рис. 21). Пусть точки A_1 и A_2 — проекции точки A на оси x и y. Тогда

$$\vec{v} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}. \tag{6}$$

Далее

$$\overrightarrow{OA_1} = v_x\vec{i} \text{ и } \overrightarrow{OA_2} = v_y\vec{j}. \tag{7}$$

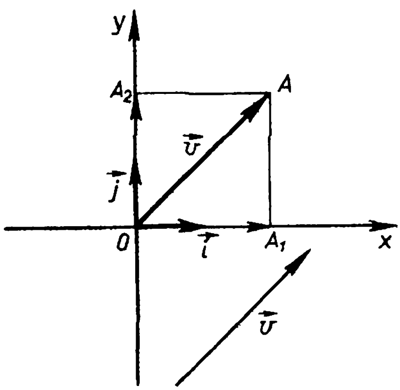


Рис 21

На основании равенств (7) и уравнения (6) получим (5) — утверждение теоремы.

Числа v_x и v_y — проекции вектора $\vec{v}$ на оси x и y соответственно (согласно определению).

Допустим, что мы каким-нибудь способом получили еще одно разложение вектора $\vec{v}$ по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$:

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}. \tag{8}$$

Будут ли в равенстве (8) числа a и b проекциями вектора $\vec{v}$ на оси x и y? Да, будут, т. е.

$$a = v_x, \ b = v_y. \tag{9}$$

Докажем это. Из равенств (5) и (8) следует, что

$$v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = a\vec{i} + b\vec{j}.$$

Отсюда

$$(v_x - a)\vec{i} = (b - v_y)\vec{j} \tag{10}$$

Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ взаимно перпендикулярны. Поэтому если допустить, что $v_x - a \neq 0$ и $b - v_y \neq 0$, то в (10) получим, что равны ненулевые взаимно перпендикулярные векторы. Это невозможно, поскольку такие векторы имеют различные направления.

Невозможно также, чтобы одна из разностей $v_x - a$ и $b - v_y$ была отлична от нуля, а другая равна нулю. В таком случае оказалось бы, что ненулевой вектор равен нуль-вектору, что невозможно.

Итак, осталась лишь одна возможность: $v_x - a = 0$ и $b - v_y = 0$, т. е. $a = v_x$ и $b = v_y$. Теорема полностью доказана.

На основании доказанной теоремы на координатной плоскости любой вектор $\vec{v}$ можно задавать его координатами v_x, v_y и писать короче: $\vec{v}\,(v_x, v_y)$ вместо равенства $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$.

Как показывает следующая теорема, действия с векторами можно свести к аналогичным арифметическим действиям с их координатами.

Т е о р е м а *(о действиях с координатами векторов)*. ***При сложении векторов их соответствующие координаты складываются. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \tag{11}$$

и

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}, \ \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}, \ \vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j}. \tag{12}$$

Надо доказать, что

$$c_x = a_x + b_x \text{ и } c_y = a_y + b_y \tag{13}$$

Действительно, из равенств (11) и (12) получаем, что

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j}) + (b_x\vec{i} + b_y\vec{j}) =$$
$$= (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j}.$$

Значит, числа $a_x + b_x$ и $a_y + b_y$ — координаты вектора $\vec{c}$, т. е. имеют место равенства (13).

Докажем второе утверждение теоремы. Рассмотрим произведение $k\vec{a}$. Получим: $k\vec{a} = k(a_x\vec{i} + a_y\vec{j}) = (ka_x)\vec{i} + (ka_y)\vec{j}$.

Значит, числа ka_x и ka_y — координаты вектора $k\vec{a}$, т. е. при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число. Теорема доказана.

Отметим два следствия этой теоремы.

Следствие 1 (*признак параллельности векторов*). ***Векторы параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.***

Действительно, пусть даны два вектора $\vec{a}(a_x, a_y)$ и $\vec{b}(b_x, b_y)$. Они параллельны тогда и только тогда, когда один из них получается из другого умножением на число. Пусть, например, $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. Это равенство имеет место тогда и только тогда, когда $b_x = \alpha a_x$ и $b_y = \alpha a_y$. ■

Поскольку координаты вектора являются его проекциями на оси координат, то из доказанной теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие 2 (*о свойствах проекций*). ***При сложении векторов их проекции на ось складываются. При умножении вектора на число его проекция на ось умножается на это число.***

Замечание. Все рассуждения в этом пункте можно провести и в случае, когда $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — любые непараллельные векторы на плоскости (рис. 22). Мы считаем их единичными и взаимно перпендикулярными для того, чтобы координаты вектора были его проекциями на оси координат, а также для того, чтобы затем установить простую связь координат векторов с координатами точек.

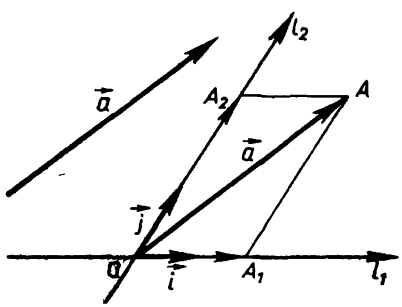


Рис. 22

29.4. Радиус-вектор

Следя за удаленным движущимся телом, например за самолетом или спутником, направляют на него луч прожектора или луч радара (рис. 23). От места наблюдения O до тела M как бы протягивается направленный отрезок — вектор $\overrightarrow{OM}$. Он «следит» за перемещением тела: тело движется и соответственно изменяется вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис. 24). Считая движущееся тело концом вектора, мы пренебрегаем его размерами и принимаем тело за точку — за материальную точку, как говорят в физике. Это допустимо, если тело достаточно мало в сравнении с расстоянием до него.

С данного места наблюдения можно следить за разными телами. Любому положению каждого из них будет соответствовать направленный к нему вектор $\overrightarrow{OM}$. С точки зрения геометрии в отвлечении от реальных тел это представляется следующим образом.

Выберем какую-нибудь точку, обозначим ее O. Каждой точке M теперь соответствует вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис. 25). Он называется **радиус-вектором** точки M, идущим из точки O.

Обратно: если задан какой-либо вектор $\vec{a}$, то, отложив его от точки O, получим точку A — конец вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Вектор $\vec{a}$, отложенный от точки O, является радиус-вектором точки A.

Таким образом, при выбранной точке O каждой точке M отвечает ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$. Верно и обратное: при выбранной точке O каждому вектору соответствует точка, радиус-вектор которой равен данному вектору.

Радиус-вектор обычно обозначают $\vec{r}$.

Представим себе, что точка движется так, что каждому моменту времени t (из какого-нибудь промежутка) соответствует ее определенное положение $M(t)$, и, значит, радиус-вектор $\overrightarrow{OM}(t)$ зависит от t. Запишем это так: $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$.

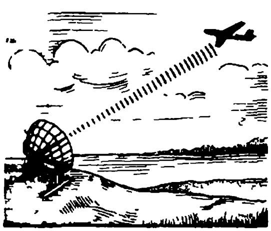


Рис 23

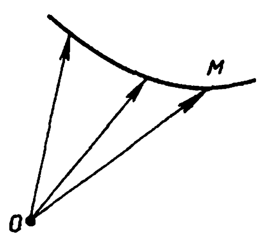


Рис 24

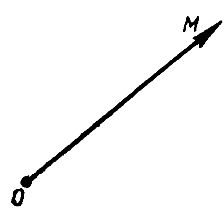


Рис. 25

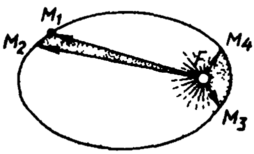


Рис 26

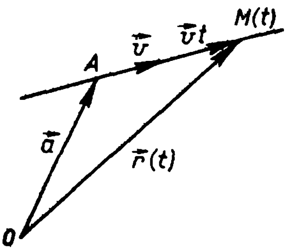


Рис 27

Так задают движение точки в механике, физике, астрономии. Например, движение планеты вокруг Солнца описывают с помощью радиус-вектора, проведенного от Солнца к планете — из центра Солнца в центр планеты (рис. 26). В геометрии изучают произвольные кривые линии, представляя линию как след — траекторию движения точки.

Пусть, например, точка M движется из точки A, где она была в момент времени $t_0 = 0$, с постоянной скоростью $\vec{v}$ (рис. 27). Тогда ее положение $M(t)$ в момент времени t можно задать радиус-вектором

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OA} + \vec{v}t. \tag{14}$$

Полагая $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$ и $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, получим уравнение равномерного прямолинейного движения

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{v}. \tag{15}$$

С точки зрения геометрии уравнение (15) представляет собой векторное уравнение прямой, проходящей через точку A в направлении вектора $\vec{v}$. При этом, чтобы точка $M(t)$ «пробежала» всю прямую, параметр t должен принимать все действительные значения.

29.5. Равенство координат векторов и координат точек

Т е о р е м а *(о равенстве координат).* ***Если на плоскости задана система координат x, y с началом в точке O и единичными векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ координатных осей x и y соответственно*** (рис. 28)***, то координаты любой точки плоскости совпадают с соответствующими координатами ее радиус-вектора, идущего из точки O.***

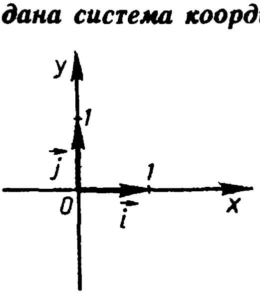


Рис 28

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем некоторую точку A с координатами x_A, y_A. Пусть точки A_x и A_y — проекции точки A

на оси координат. Тогда x_A является координатой точки A_x на оси x, а y_A — координатой точки A_y на оси y. По определению координаты точки прямой число x_A равно расстоянию $|OA_x|$ от точки A_x до точки O, взятому со знаком «+», если A_x лежит на положительной полуоси оси x, и со знаком «—», если A_x лежит на отрицательной полуоси оси x (рис. 29). В первом случае вектор $\overrightarrow{OA_x}$ сонаправлен с вектором $\vec{i}$, а во втором они направлены противоположно. А тогда, как показано в п. 29.2, число $x_A = \pm|OA_x|$ является проекцией вектора $\overrightarrow{OA}$ на ось x.

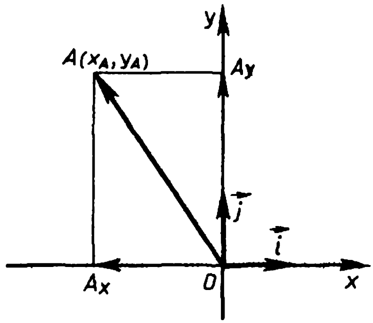


Рис. 29

Рассуждая аналогично, получим, что число y_A равно проекции вектора $\overrightarrow{OA}$ на ось y.

Но, как доказано в теореме о координатном представлении вектора (п. 29.3), координатами вектора являются его проекции на оси координат. Поэтому $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$. Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет легко найти координаты вектора, отложенного от любой точки, если мы знаем координаты его начала и его конца. А именно имеет место следующая теорема.

Теорема *(о координатах вектора).* ***Координаты вектора, отложенного от произвольной точки, равны разности соответствующих координат его конца и его начала, т. е. вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $x_B - x_A$, $y_B - y_A$, где x_A, y_A — координаты точки A, а x_B, y_B — координаты точки B.***

Доказательство. Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (рис. 30) и $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j},$$

что и требовалось доказать.

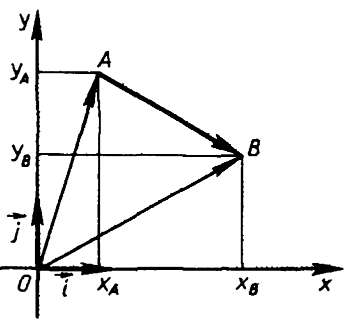


Рис 30

29.6. Длина вектора и расстояние между точками

Теорема (*о длине вектора*). ***Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат, т. е. если*** $\vec{a} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$, ***то***

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}. \qquad (16)$$

Доказательство. Если хотя бы одна из координат x_0, y_0 вектора $\vec{a}$ равна нулю, то равенство (16) очевидно. Например, если $x_0 = 0$, то $\vec{a} = y_0\vec{j}$, и потому

$$|\vec{a}| = |y_0\vec{j}| = |y_0|\,|\vec{j}| = |y_0| = \sqrt{y_0^2},$$

т. е. имеет место (16).

Потому рассмотрим случай, когда $x_0 \neq 0$ и $y_0 \neq 0$. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат. Получим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ (рис. 31). Пусть точки A_x и A_y — проекции точки A на оси x и y. Как доказано в предыдущем пункте, координаты точки A равны координатам x_0, y_0 вектора $\vec{a}$ и, кроме того, точки A_x и A_y имеют числа x_0 и y_0 своими координатами на осях x и y соответственно.

Отрезок OA — диагональ прямоугольника OA_xAA_y. Поэтому (по теореме Пифагора)

$$OA^2 = OA_x^2 + OA_y^2$$

Но $|OA| = |\vec{a}|$, $|OA_x| = |x_0|$ и $|OA_y| = |y_0|$. Поэтому

$$|\vec{a}|^2 = |x_0|^2 + |y_0|^2,$$

т. е.

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}. \blacksquare$$

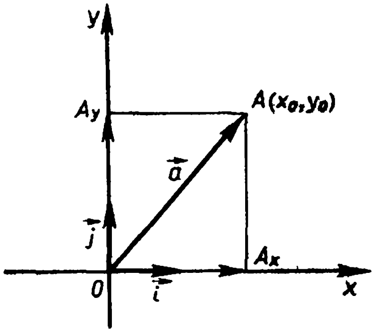


Рис 31

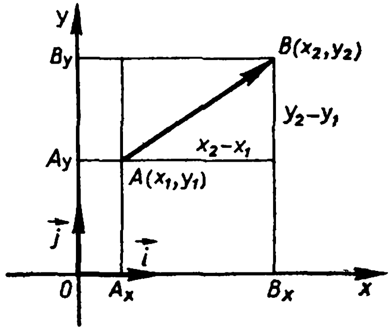


Рис 32

Следствием этой теоремы является формула, которая выражает расстояние между точками через их координаты. А именно пусть даны точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Тогда расстояние между точками A и B — это длина вектора $\overrightarrow{AB}$, т. е. $|AB| = |\overrightarrow{AB}|$ (рис. 32). Так как координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ являются разности $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$, то

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{17}$$

Это и есть формула для расстояния между точками.

Итак, *расстояние между точками равно корню квадратному из суммы квадратов разностей их координат.*

Задачи к § 29

Задачи к п. 29.2

Основная задача

1. а) Запишите формулу для вычисления проекции вектора на ось. Как найти из нее: длину вектора, угол между вектором и осью? б) Зафиксируйте одну из величин: длину вектора, проекцию вектора на ось или угол между вектором и осью. Пусть другая из этих величин стала изменяться, например увеличиваться. Что будет происходить с третьей? в) В каких границах изменяется проекция вектора (на ось) заданной длины при изменении угла? г) В каких границах изменяется длина вектора при заданной его проекции на ось с изменением угла между вектором и этой осью?

* * *

2. При каком угле между вектором и осью проекция вектора на эту ось: а) положительна; б) отрицательна; в) равна нулю?

3. а) Могут ли разные векторы иметь одну и ту же проекцию на данную ось? б) Верно ли, что больший по длине вектор имеет большую проекцию на данную ось?

4. Чему равна проекция вектора на ось, если длина вектора равна 1, а угол между вектором и осью равен: а) 30°, б) 45°; в) 60°; г) 120°; д) 135°; е) 150°?

5. Вычислите длину вектора, если: а) его проекция на ось равна 1, а его угол с осью равен 30°; б) его проекция на ось равна —2, а его угол с осью равен 135°.

6. Какой угол образует вектор единичной длины с осью, если его проекция на ось равна: а) $-\frac{1}{2}$; б) 0; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{1}{3}$?

7. Пусть проекция вектора $\vec{a}$ на ось x равна 2, проекция вектора $\vec{b}$ на ось x равна -3, проекция вектора $\vec{c}$ на ось x равна 4. Нарисуйте такие векторы. Чему равна проекция на ось x векторов: а) $-2\vec{a}$; б) $\vec{b}+\vec{c}$; в) $\vec{c}-\vec{a}$; г) $3\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; д) $-\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{c}$?

8. Пусть вектор $\vec{a}$ длиной 1 образует с осью x угол 30°, а вектор $\vec{b}$ длиной 2 образует с осью x угол 135°. Чему равна проекция на ось x вектора: а) $2\vec{a}$; б) $-3\vec{b}$; в) $\vec{a}+\vec{b}$ г) $\vec{b}-\vec{a}$; д) $\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$; е) $-2\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$?

9. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 1, а острый угол при вершине B равен 30°. Чему равны проекции: а) $\overrightarrow{AB}$ на ось CA; б) $\overrightarrow{BC}$ на ось CA; в) $\overrightarrow{AB}$ на ось CB; г) $\overrightarrow{BC}$ на ось CB; д) $\overrightarrow{AC}$ на ось BA; е) $\overrightarrow{BC}$ на ось BA?

10. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 1. Чему равна проекция на ось AC вектора: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{CK}$, где точка K — середина AB; г) $\overrightarrow{OA}$, где точка O — точка пересечения медиан треугольника?

11. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1. Точка K — середина AD, точка L — середина AB, точка O — центр квадрата. Чему равна проекция на ось AD вектора: а) $\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{DB}$; г) $\overrightarrow{BK}$; д) $\overrightarrow{CL}$; е) $\overrightarrow{LK}$; ж) $\overrightarrow{KO}$?

12. Может ли проекция вектора на каждую из двух пересекающихся осей равняться нулю?

Задачи к п. 29.3

Основные задачи

13. а) Дан вектор $\vec{a}\ (x, y)$. Каковы координаты вектора $-\vec{a}$? б) Даны векторы $\vec{a}\ (x_1, y_1)$ и $\vec{b}\ (x_2, y_2)$. Каковы координаты вектора $\vec{a}-\vec{b}$? в) Даны векторы $\vec{a}\ (x_1, y_1)$ и $\vec{b}\ (x_2, y_2)$. Каковы координаты вектора $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$?

14. Пусть $\vec{a}$ — единичный вектор, φ_1 и φ_2 — углы, которые он составляет с осями координат. Докажите, что $\vec{a}=\cos\varphi_1\vec{i}+\cos\varphi_2\vec{j}$.

* * *

15. Пусть $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — два единичных взаимно перпендикулярных вектора осей x и y. Какие координаты имеет единичный вектор $\vec{a}$, образующий с осью x угол φ? (Углу φ можно придать значения $0°$, $30°$, $45°$ и т. д.)

16. Нарисуйте вектор $\overrightarrow{OA}$, координаты которого: а) $(0, 1)$; б) $(2, 0)$; в) $(-3, 1)$; г) $(2, -3)$; д) $(-4, -2)$. Вычислите его длину и угол, который он образует с осью x.

17. Даны векторы $\vec{a}\,(1, -2)$ и $\vec{b}\,(-3, -1)$. а) Каковы координаты вектора: 1) $2\vec{a}$; 2) $-3\vec{b}$; 3) $\vec{a}+\vec{b}$; 4) $\vec{b}-\vec{a}$; 5) $-\frac{1}{2}\vec{a}+$ $+\frac{2}{3}\vec{b}$? б) Можно ли найти такое число α, чтобы $\alpha\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$? в) Можно ли найти такие два числа α и β, чтобы $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$?

18. Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные векторы осей x и y. Чему равны числа α и β, если а) $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=2\vec{i}-3\vec{j}$;

б) $\alpha\vec{i}+2\vec{j}=-3\vec{i}-\beta\vec{j}$;   в) $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=2\vec{i}$;

г) $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=-3\vec{j}$;   д) $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=\vec{0}$?

19. Каждая сторона треугольника ABC равна 2 (рис. 33). Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$

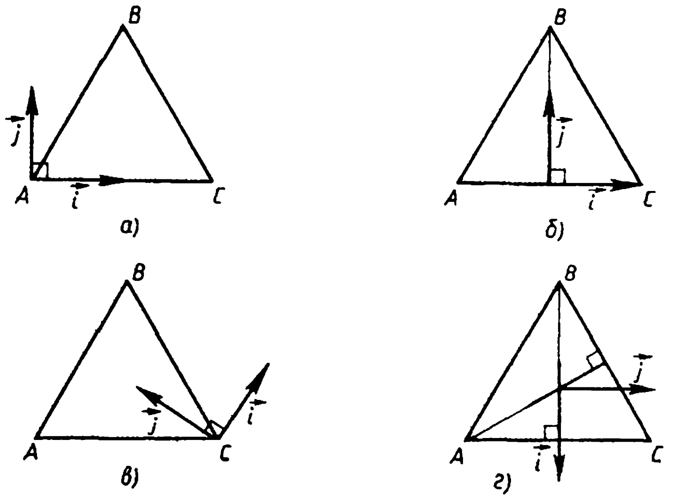


Рис 33

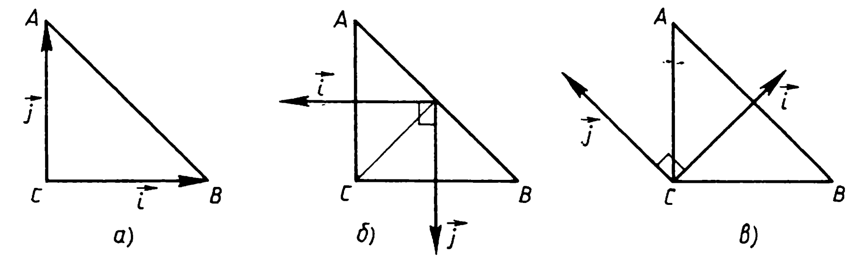


Рис. 34

20. Треугольник ABC равнобедренный прямоугольный с прямым углом при вершине C (рис. 34). $|AC| = |BC| = 1$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$.

21. Параллельны ли векторы:

а) $\vec{a}\,(-2, 1)$ и $\vec{b}\,(4, -2)$; б) $\vec{a}\,(1, -3)$ и $\vec{b}\,(1, 3)$;

в) $\vec{a}\,(3, -2)$ и $\vec{b}\,(-3, 2)$; г) $\vec{a}\,(1, 0)$ и $\vec{b}\,(3, 0)$;

д) $\vec{a}\,(0, -1)$ и $\vec{b}\,(1, 0)$; е) $\vec{a}\,(0, 0)$ и $\vec{b}\,(-2, -1)$?

22. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны. Запишите их недостающие координаты:

а) $\vec{a}\,(1, -2)$, $\vec{b}\,(3, \ldots)$; б) $\vec{a}\,(\ldots, 2)$, $\vec{b}\,(4, -1)$;

в) $\vec{a}\,(-2, \ldots)$, $\vec{b}\,(\ldots, -2)$; г) $\vec{a}\,(-1, \ldots)$, $\vec{b}\,(2, \ldots)$.

Задачи к п. 29.5

23. Каковы координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(0, 1)$, $B(1, 0)$; б) $A(-2, 1)$, $B(-4, 2)$; в) $A(-1, -3)$, $B(-3, -1)$; г) $A(p, q)$, $B(-p, -q)$?

24. От точки A отложили вектор $\vec{a}$. Получили $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. а) Каковы координаты точки B, если: 1) $A(1, 0)$, $\vec{a}(0, 1)$; 2) $A(-2, -1)$, $\vec{a}(-1, -2)$; 3) $A(p, q)$, $\vec{a}(-p, -q)$? Пусть известны координаты $\vec{a}$ и B. Как найти координаты точки A? Приведите примеры.

25. Пусть известны координаты точек A и B. Как, используя их, построить векторы: а) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; б) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$; в) $3\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$? Приведите примеры.

26. а) Каждая из двух прямых задана координатами двух своих точек. Как выяснить, будут ли прямые параллельны? Приведите примеры. б) Известны координаты трех точек. Как узнать, лежат ли они на одной прямой? Приведите примеры.

27. Пусть $A(1, -1)$, $B(2, 0)$, $C(-1, 3)$. Найдите координаты точки D, если: а) $\overrightarrow{BD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$; г) все четыре точки — вершины параллелограмма.

Задачи к п. 29.6

Основные задачи

28. Как, используя формулу расстояния между точками, выяснить, лежат ли три точки, заданные своими координатами, на одной прямой? Приведите примеры.

29. Пусть известны координаты двух векторов. а) Как найти угол между ними? Приведите примеры. б) При каком соотношении между координатами векторов эти векторы перпендикулярны?

30. Пусть $\vec{a}(x_1, y_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2)$. Как найти длину вектора $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$?

* * *

31. Какой из векторов длиннее: а) $(0, 1)$ или $(-1, 0)$; б) $(-1, -1)$ или $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$; в) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ или $(0, -\sqrt{2})$; г) (p, q) или $(-q, p)$?

32. Пусть известна длина вектора и одна из его координат. Как найти другую? Приведите примеры.

33. Пусть $\vec{a}(-2, 1)$, $\vec{b}(2, -3)$. а) Чему равна длина вектора: $\frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$; $-3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$? б) Чему равен угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$? в) Чему равен угол между $\vec{a}$ и каждым из векторов из задания а)?

34. Нарисуйте многоугольник $ABCDE$, где $A(1, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(3, 2)$, $D(3, -1)$, $E(-1, -2)$. Вычислите: а) длину самой длинной его стороны; б) длину самой короткой его стороны; в) длину самой длинной его диагонали; г) длину самой короткой его диагонали; д) углы этого многоугольника; е) его площадь.

35. Дана точка $A(-2, 3)$. Найдите координаты: а) какой-либо точки, удаленной от A на 1; б) точки на оси x, удаленной от A на 4; в) точки на оси y, удаленной от A на 5; г) точки на биссектрисе угла между осями координат, удаленной от A на 1.

§ 30*. СКАЛЯРНОЕ УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

30.1. Определение скалярного произведения

Из курса физики известно, что механическая работа A, совершаемая постоянной силой $\vec{F}$ при перемещении $\vec{s}$ тела (рис. 35), определяется как произведение:

$$A = |\vec{F}|\ |\vec{s}| \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{s}}). \qquad (1)$$

Число, определяемое для векторов $\vec{F}$ и $\vec{s}$ правой частью равенства (1), называется скалярным произведением этих векторов. Дается следующее определение.

Определение. **Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.**

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обычно обозначают $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Таким образом, по определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos\varphi,\ \varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \qquad (2)$$

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ нулевой, то считается по определению, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Отметим сразу же два важных частных случая.

1) Если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\varphi = 0°$, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и из (2) следует, что $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$. Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ обозначается $\vec{a}^2$ (оно называется **скалярным квадратом вектора** $\vec{a}$). Итак, $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

2) *Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ их скалярное произведение $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a} \perp \vec{b}$.* Действительно, если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$, и, как следует из (2), равенство $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ равносильно тому, что $\cos\varphi = 0$, т. е. $\vec{a} \perp \vec{b}$. Если же хотя бы один из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ нулевой, то по определению $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$.

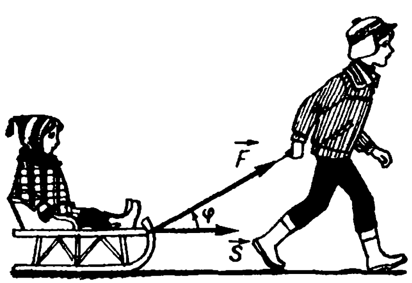


Рис. 35

30.2. Выражение скалярного произведения через координаты

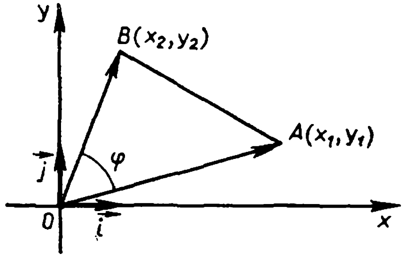


Рис. 36

Пусть даны два вектора $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$. Рассмотрим сначала случай, когда они не параллельны. Через φ обозначаем угол между ними. Отложим эти векторы от начала O. Получим векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (рис. 36). Точка A имеет координаты x_1, y_1, а точка B — координаты x_2, y_2. По ОТП[1] для квадрата стороны AB в треугольнике OAB получаем:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\varphi. \qquad (3)$$

Но

$$OA \cdot OB\cos\varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos\varphi,$$

т. е.

$$OA \cdot OB\cos\varphi = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Используя последнее равенство, получаем из (3), что

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2). \qquad (4)$$

По формуле расстояния между точками

$$OA^2 = x_1^2 + y_1^2,\ OB^2 = x_2^2 + y_2^2,\ AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Подставляя эти выражения для OA^2, OB^2 и AB^2 в (4), получаем, что

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2. \qquad (5)$$

Это и есть выражение скалярного произведения векторов через их координаты.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны, то один из них получается из другого умножением на число. Пусть, например, $\vec{b} = k\vec{a}$. Легко проверить, что равенство (4) справедливо и в этом случае (под-

[1] ОТП — обобщенная теорема Пифагора (см. § 20 учебника для VII класса).

ставьте в него вместо $\vec{b}$ вектор $k\vec{a}$). А тогда справедливо и (5), т. е. формула (5) имеет место для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. ■

Из (5) получаем такое условие перпендикулярности векторов: *векторы* $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ *перпендикулярны тогда и только тогда, когда*

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0. \qquad (6)$$

30.3. Свойства скалярного умножения

Скалярное умножение имеет следующие свойства.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ***для любых*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ *(перестановочность или коммутативность).*

2. $(x\vec{a}) \cdot \vec{b} = x(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ***для любого числа*** x ***и любых*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ *(однородность).*

3. $(\vec{a} + \vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ ***для любых трех векторов*** $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *(распределительное свойство или дистрибутивность).*

Все эти свойства следуют из формулы (5) и соответствующих свойств операций с числами. Проверим, например, свойство 3.

Пусть $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ и $\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j}$.

Тогда $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$. Поэтому

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3.$$

Но

$$\vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c} = x_1x_3 + y_1y_3 + x_2x_3 + y_2y_3 = (x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3,$$

$$\text{т. е. } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Замечание. Если в свойстве 3 понимать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как силы, действующие на тело, а вектор $\vec{c}$ как перемещение этого тела, то доказанное свойство можно истолковать так: работа, совершаемая результирующей силой $\vec{a} + \vec{b}$ при перемещении $\vec{c}$, равна сумме работ, совершаемых соответственно силами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при том же перемещении $\vec{c}$.

Доказанные свойства вместе со свойствами сложения векторов позволяют скалярно умножать суммы векторов по обычным правилам алгебры. Например:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} +$$
$$+ \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2.$$

30.4. Применения скалярного умножения

Операция скалярного умножения векторов позволяет находить углы между ненулевыми векторами (точнее, косинусы этих углов) и длины векторов. Из формулы (2) следует, что для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\cos\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}, \tag{7}$$

а для длины вектора $\vec{a}$ получаем формулу

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}. \tag{8}$$

Опираясь на последнюю формулу или равносильное ей равенство

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$$

и пользуясь доказанными свойствами скалярного умножения, некоторые теоремы можно доказать значительно проще, чем применяя другие способы доказательства.

Докажем, например, такую теорему: *сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.*

Пусть $ABCD$ — параллелограмм (рис. 37). В нем

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.

Возведя в квадрат оба равенства, получим:

$$\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC},$$
$$\overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}.$$

Сложив полученные равенства и учтя, что $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, придем к нужному результату:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

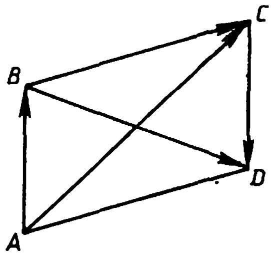


Рис 37

Задачи к § 30

Задачи к п. 30.1

1. Каков знак скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если угол между ними: а) острый; б) тупой? Сформулируйте и проверьте обратное.

2. Как выглядит формула скалярного произведения, если векторы параллельны?

3. Скалярное произведение двух векторов равно 0. Значит ли это, что векторы перпендикулярны?

4. Докажите, что $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

5. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:
а) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 45°$; б) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 150°$;
в) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 135°$; г) $|\vec{a}| = d_1$, $|\vec{b}| = d_2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0°$;
д) $|\vec{a}| = d_1$, $|\vec{b}| = d_2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180°$.

6. Вычислите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:
а) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3$, $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 1$;
б) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -2$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$;
в) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 7$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$;
г) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$;
д) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -1$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$.

7. Приведите примеры двух векторов, скалярное произведение которых равно 0.

8. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1. Вычислите: а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}$; г) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$; д) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC}$; е) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$; ж) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$; з) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AM}$, где K — середина CD, M — середина BC; и) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB})$.

9. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной 1. Вычислите: а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BM}$, где K — середина BC, M — середина AC; д) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BC}$.

Задачи к п. 30.2

10. Вычислите скалярное произведение векторов, заданных своими координатами: а) $(0; 3)$ и $(-2; 0)$; б) $(-5, 7)$ и $(2; -1)$.

11. $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные векторы. Вычислите: а) $\vec{i}\cdot(\vec{i} + 2\vec{j})$; б) $(\vec{i} - \vec{j})\cdot\vec{j}$; в) $(2\vec{i} + \vec{j})\cdot(-3\vec{i} - \vec{j})$;
г) $\left(-\frac{1}{2}\vec{i} - \vec{j}\right)\left(-\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}\right)$; д) $(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j})^2$.

12. Вычислите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:
а) $\vec{a}(-1, 2)$, $\vec{b}(2, -1)$; б) $\vec{a}(0, 1)$, $\vec{b}(-1, -1)$.

13. Пусть $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} - 3\vec{j}$. Вычислите проекцию вектора $\vec{a}$ на ось, проходящую через вектор $\vec{b}$.

14. Докажите, что векторы (x, y) и $(-y, x)$ перпендикулярны. Какие еще векторы перпендикулярны вектору (x, y)?

15. Дан вектор $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. а) Укажите такой вектор $\vec{b}$, что $\vec{b} \perp \vec{a}$. б) Укажите такой вектор единичной длины.

16. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(-2, -3)$. Найдите единичный вектор, перпендикулярный $\vec{a}$.

17. Пусть $\vec{a}(1, x)$, $\vec{b}(1, y)$. При каком условии: а) эти векторы перпендикулярны; б) эти векторы образуют острый угол; в) эти векторы образуют тупой угол?

18. Даны векторы $\vec{a}(-1, 3)$ и $\vec{b}(2, -1)$. Найдите вектор $\vec{c}$, такой, что: а) $|\vec{c}| = 1$ и $(\widehat{\vec{c}\,\vec{a}}) = 30°$ (какой угол он образует с $\vec{b}$?); б) $\vec{c}\cdot\vec{a} = \vec{c}\cdot\vec{b}$ (могут ли эти произведения равняться 1?); в) $\vec{c}\cdot\vec{a} = 3$, $\vec{c}\cdot\vec{b} = 2$.

19. Пусть $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$. Вычислите длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а также угол между ними.

20. Пусть $A(-1, 2)$, $B(-2, -3)$, $C(1, 4)$, $D(4, -2)$. Вычислите: а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$; в) угол между $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$; г) угол между $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

Задачи к п. 30.3

21. Докажите равенства: а) $\vec{a}\cdot(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c}$; б) $(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{d}$; в) $(x\vec{a})\cdot(y\vec{b}) = (x\cdot y)\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$; г) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}((\vec{a} + \vec{b})^2 - \vec{a}^2 - \vec{b}^2) = \frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2) = \frac{1}{4}((\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2)$.

22. Преобразуйте: а) $(\vec{a} + 2\vec{b})\cdot(3\vec{a} - \vec{b})$; б) $\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right)$; в) $\vec{a}\cdot(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b}\cdot(\vec{a} + \vec{b})$.

23. Пусть $\vec{b} \perp \vec{a}$. Докажите, что $\vec{x}\cdot\vec{a} = (\vec{x} + \vec{b})\cdot\vec{a}$. Сделайте рисунок. Проверьте обратное.

24. Пусть $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}$. Следует ли отсюда, что $\vec{b} = \vec{c}$?

25. Когда верны равенства: а) $(-\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(2\vec{b})$; в) $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$; г) $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$; д) $a\cdot(a\cdot b)=\vec{a}^2\vec{b}$; е) $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$?

26. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ единичные, $\widehat{(\vec{a},\ \vec{b})}=30^\circ$, $\widehat{(\vec{a},\ \vec{c})}=45^\circ$, $\widehat{(\vec{b},\ \vec{c})}=60^\circ$. Вычислите: а) $(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})$, б) $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$; в) $(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}$; г) $(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$; д) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$.

27. Вычислите угол между единичными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$; б) $(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a}$; в) $(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$; г) $(2\vec{a}+\vec{b})\perp(2\vec{b}+\vec{a})$.

Задачи к п. 30.4

28. Докажите, что диагонали ромба перпендикулярны. Проверьте обратное.

29. $ABCD$ — четырехугольник. Докажите, что $(AC)\perp(BD)$ тогда и только тогда, когда $|AD|^2+|BC|^2=|AB|^2+|CD|^2$.

30. В четырехугольнике известны длины двух противоположных сторон и угол между прямыми, на которых они лежат. Как найти длину средней линии, соединяющей середины других двух его сторон? При каком угле между прямыми эта длина наибольшая? наименьшая? В каком четырехугольнике достигают этих значений обе средние линии?

§ 31. УРАВНЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ И ПРЯМОЙ

31.1. Уравнение окружности

Пусть на плоскости введены прямоугольные координаты. Рассмотрим окружность радиуса r с центром в точке $C(a,\ b)$ (рис. 38). Точка $M(x,\ y)$ принадлежит этой окружности тогда и только тогда, когда ее расстояние от центра равно r, т. е. $MC=r$, или, что то же самое, $MC^2=r^2$. Выразив расстояние MC через координаты точек M и C по формуле (17) п. 29.6, получим:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad (1)$$

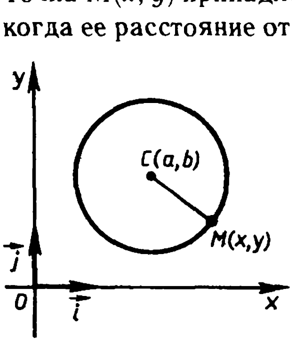


Рис. 38

Таким образом, точка $M(x,\ y)$ принадлежит окружности тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению (1). В этом случае говорят, что (1) — это *уравнение окружности.*

Если центр окружности лежит в начале координат, так что $a = b = 0$, то уравнение (1) имеет совсем простой вид:

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (2)$$

31.2. Общее понятие об уравнении фигуры

Говорят, что *фигура F задается данным уравнением в прямоугольных координатах,* если точка принадлежит фигуре F тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют данному уравнению. Это означает, что выполняются два условия: 1) если точка принадлежит фигуре F, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению и 2) обратно: если числа x, y удовлетворяют уравнению, то точка с такими координатами принадлежит фигуре F

Второе условие можно выразить и так: координаты любой точки, не принадлежащей фигуре F, не удовлетворяют уравнению.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Ось y задается уравнением $x = 0$, а ось x — уравнением $y = 0$. В самом деле, точка лежит на оси y тогда и только тогда, когда $x = 0$, а на оси x тогда и только тогда, когда $y = 0$.

Пример 2. Прямая, перпендикулярная оси x, задается уравнением $x = x_0$ (рис. 39). Действительно, координата x какой-либо точки M — это координата ее проекции на ось x. Поэтому все точки, лежащие на данной прямой, перпендикулярной оси x, имеют одну и ту же координату x, т. е. одно и то же ее значение x_0. Точки же, не лежащие на этой прямой, имеют другое значение координаты x.

Аналогично прямая, перпендикулярная оси y, имеет уравнение $y = y_0$ (рис. 40).

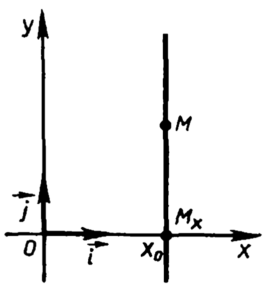


Рис 39

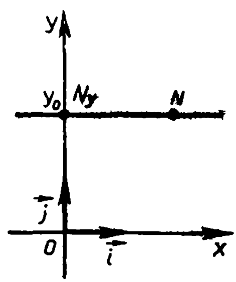


Рис 40

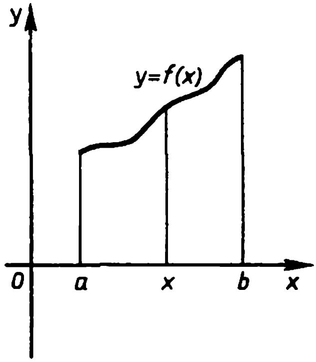


Рис 41

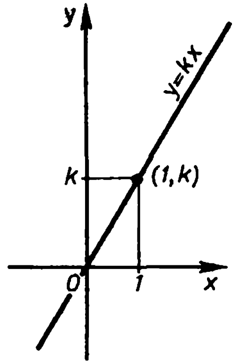


Рис. 42

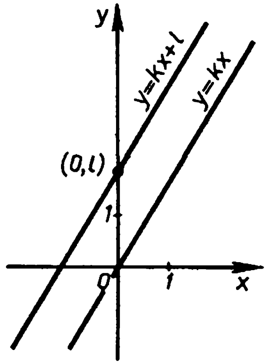


Рис. 43

Пример 3. Уравнение $xy = 0$ задает на плоскости «координатный крест», т. е. фигуру, состоящую из обеих осей. Действительно, если точка принадлежит этой фигуре, то хотя бы одна из ее координат равна нулю. Поэтому $xy = 0$. Если же точка не принадлежит ни одной из осей координат, то для такой точки $x \neq 0$ и $y \neq 0$, а потому $xy \neq 0$.

Пример 4. Из курса алгебры известно, что графиком функции f является фигура, заданная уравнением $y = f(x)$ на некотором числовом промежутке (рис. 41). Например, графиком линейной функции, заданной формулой $y = kx + l$, является прямая. Частным случаем линейной функции (при $l = 0$) является прямая пропорциональность — функция $y = kx\,(k \neq 0)$. График такой функции — это прямая, проходящая через начало координат и точку $(1;\ k)$ (рис. 42). График же функции $y = kx + l$ при $l \neq 0$ параллелен графику функции $y = kx$ и проходит через точку $(0;\ l)$ (рис. 43). Но в VI классе мы не могли доказать этих утверждений. Сейчас мы докажем их.

Отметим еще, что фигуры на плоскости задаются не только уравнениями, но и неравенствами. Вы уже знаете, как задаются неравенствами фигуры на координатной прямой: например, на оси x неравенство $x \geqslant a$ задает луч, а неравенство $b \leqslant x \leqslant c$ — отрезок (рис. 44).

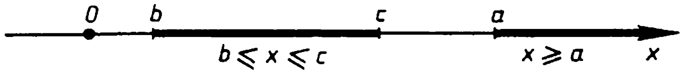


Рис. 44

Говорят, что *фигура задается некоторым неравенством*, если точка принадлежит данной фигуре тогда и только тогда, когда координаты этой точки являются решением данного неравенства.

Дайте развернутую формулировку этого определения самостоятельно.

Например, неравенством $y \geqslant 0$ задается верхняя полуплоскость, ограниченная осью x (рис. 45, *а*), а неравенством

$$x^2 + y^2 \leqslant r^2 \qquad (3)$$

задается круг с центром в точке $O(0;\ 0)$ и радиусом r (рис. 45, *б*) (объясните почему).

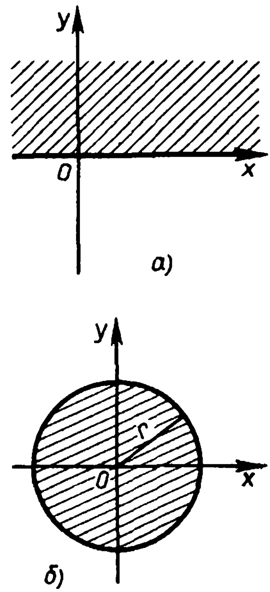


Рис. 45

31.3. Уравнение прямой

Прямую на плоскости можно задать, выбрав некоторую точку этой прямой и некоторый ненулевой вектор, лежащий на этой прямой или параллельный этой прямой (рис. 46). Такой вектор называется **направляющим вектором прямой.** Как мы уже знаем, прямая, перпендикулярная оси x, задается уравнением $x = x_0$. Ее направляющим вектором будет любой вектор $\vec{m} = \alpha\vec{j}$ при $\alpha \neq 0$ (рис. 47).

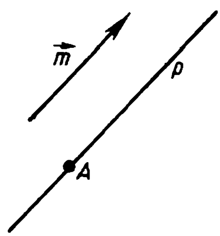


Рис. 46

Рассмотрим теперь случай, когда прямая p не перпендикулярна оси x (рис. 48). Возьмем на прямой p направляющий вектор $\vec{m}$, проекция которого на ось x равна 1 (объясните, как можно получить такой вектор). Пусть проекция вектора $\vec{m}$ на ось y равна k, т. е. $\vec{m} = \vec{i} + k\vec{j}$. Прямая p

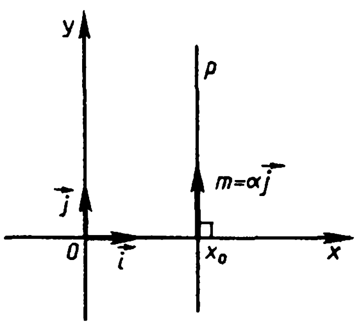


Рис 47

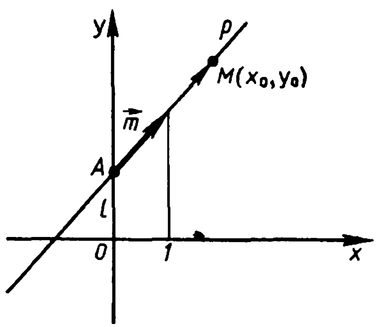


Рис 48

пересечет ось y в некоторой точке $A(0; l)$. Докажем, что прямая p задается уравнением

$$y = kx + l. \tag{4}$$

Если $k = 0$, то прямая p перпендикулярна оси y и, как мы уже показали в предыдущем пункте, она задается уравнением $y = l$. Поэтому рассмотрим случай, когда $k \neq 0$.

Возьмем любую точку $M(x_0, y_0)$. Вектор $\overrightarrow{AM}$ имеет координаты x_0 и $y_0 - l$. Точка M лежит на прямой p тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\vec{m}$ параллельны. А эти векторы параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, т. е.

$$\frac{x_0}{1} = \frac{y_0 - l}{k}. \tag{5}$$

Из (5) следует равенство

$$y_0 = kx_0 + l.$$

Итак, точка $M(x_0; y_0) \in p$ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению $y = kx + l$. Следовательно, прямая p, не перпендикулярная оси x, задается уравнением $y = kx + l$.

Отметим, что для всех случаев расположения прямой полученные нами уравнения являются частными случаями более общего уравнения

$$ax + by + c = 0.$$

Такие уравнения называют **линейными**, полагая при этом, что хотя бы одно из чисел a, b отлично от нуля. Следовательно, мы доказали, что каждая прямая на плоскости задается в прямоугольных координатах линейным уравнением.

Следующая теорема показывает, что верно и обратное утверждение.

Теорема *(о линейном уравнении)*. ***Каждое линейное уравнение в прямоугольных координатах задает на плоскости прямую.***

Доказательство. Пусть на плоскости введены прямоугольные координаты x, y и задано линейное уравнение

$$ax + by + c = 0, \tag{6}$$

причем хотя бы одно из чисел a, b отлично от нуля. Покажем, что уравнение (6) задает на плоскости прямую. Если $b = 0$, то $a \neq 0$ и уравнение (6) можно записать так:

$$x = -\frac{c}{a}.$$

Как мы знаем, такое уравнение задает прямую, перпендикулярную оси x.

Если же $b \neq 0$, то уравнение (6) можно записать в виде

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}. \tag{7}$$

Построим прямую, проходящую через точку $\left(0;\ -\frac{c}{b}\right)$ с направляющим вектором $\vec{m}\left(1;\ -\frac{a}{b}\right)$. Как было доказано, эта прямая задается уравнением (7), а значит, и уравнением (6). Теорема доказана.

Напомним, что коэффициент k в уравнении $y = kx + l$ называется угловым коэффициентом прямой p, заданной этим уравнением.

Все прямые с одним и тем же угловым коэффициентом k параллельны, так как имеют один и тот же направляющий вектор $\vec{m}(1;\ k)$ (рис. 49).

Если $k \neq 0$, то угловой коэффициент имеет такой геометрический смысл: он равен тангенсу угла φ, образованного лучом прямой, лежащим выше оси x, и лучом оси x, идущим в положительном направлении (рис. 50). Убедимся в этом. Для этого достаточно рассмотреть случай, когда прямая p проходит через начало координат, т. е. задана уравнением $y = kx$.

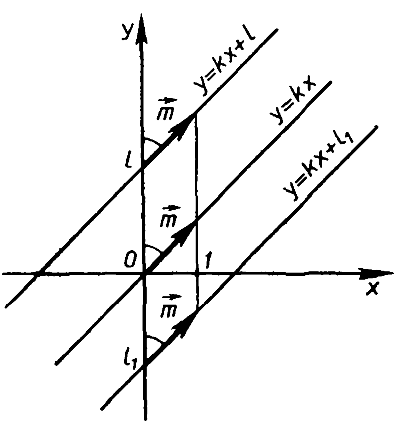


Рис. 49

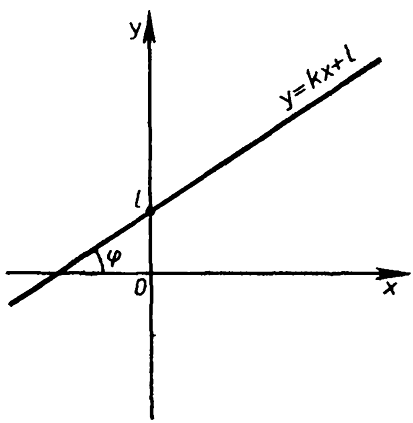


Рис. 50

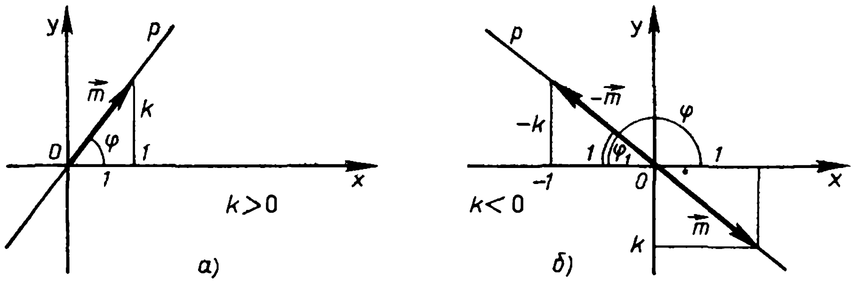


Рис. 51

Если $k > 0$, то равенство

$$k = \operatorname{tg}\varphi \tag{8}$$

получим, проектируя вектор $\vec{m}(1; k)$ на оси координат и рассматривая получившиеся прямоугольные треугольники (рис. 51).

Если $k < 0$, то для угла $\varphi_1 = 180° - \varphi$, смежного с углом φ, точно так же получаем:

$$\operatorname{tg}(180° - \varphi) = -k. \tag{9}$$

А так как $\operatorname{tg}(180° - \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi$, то снова приходим к равенству $\operatorname{tg}\varphi = k$.

Замечание. Каждое линейное уравнение задает вполне определенную прямую на плоскости. Но каждая данная прямая задается разными уравнениями. Если умножить левую часть уравнения (6) на любое число, не равное нулю, то получится уравнение, равносильное данному; оно задает ту же самую прямую.

31.4. Фигура — множество точек

При выводе уравнения окружности (прямой) мы опирались на то, что относительно каждой точки могли сказать, принадлежит она этой окружности (прямой) или нет.

Каждая фигура определяется своими точками, и говорят, что **фигура есть множество точек.** При этом для конкретной фигуры (или данного вида фигур) указывается условие, определяющее, какие точки принадлежат фигуре, какие нет. Например, для окружности это — условие равенства расстояний от центра: *окружность есть множество точек, удаленных от данной точки на некоторое данное расстояние* (нередко говорят «множество *всех* точек...», но мы этого делать не будем, подразумевая, что если сказано «множество точек с таким-то условием», то значит: всех таких точек).

Другой пример. По теореме о неравенстве треугольника точка M лежит на отрезке AB тогда и только тогда, когда

$$AM + MB = AB. \tag{10}$$

Поэтому можно сказать: *отрезок AB — это множество точек, сумма расстояний которых от точек A и B равна расстоянию AB.*

Еще пример. Серединным перпендикуляром отрезка называют прямую, проходящую через середину отрезка и перпендикулярную ему. Было доказано, что точка лежит на серединном перпендикуляре отрезка тогда и только тогда, когда она равноудалена от его концов, т. е. *серединный перпендикуляр отрезка есть множество точек, равноудаленных от концов отрезка.*

Может случиться, что вообще нет точек, которые удовлетворяли бы данному условию. Тогда говорят, что оно представляет **пустое множество.**

Например, множество точек M с условием

$$AM + MB < AB$$

пустое.

Как было сказано, то, что фигура F задается данным уравнением, означает, что точка принадлежит фигуре тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению. Другими словами, точки фигуры F и точки с координатами, удовлетворяющими уравнению, это одни и те же точки; они образуют одно и то же множество.

Следовательно, можно дать такую формулировку: *то, что фигура задается данным уравнением, означает, что она является множеством тех точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению.*

Вообще множество точек задается условием (или условиями), налагаемым на его точки. Уравнение — это тоже условие, налагаемое на точки через их координаты.

З а м е ч а н и е. Вместо слов «множество точек» говорят еще «геометрическое место точек» (удовлетворяющих какому-либо условию), вместо «фигура есть множество точек» говорят, что она «состоит» из точек. Например: «Окружность состоит из всех точек, находящихся на данном расстоянии от данной точки».

31.5. Метод координат

Применяя метод координат, можно решать задачи двух видов.

1. Задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах различные геометрические соотношения, мы можем применять алгебру к решению геометрических задач, к доказательству геометрических теорем.

Например, использовав формулировку признака параллельности векторов через их координаты (следствие 1, п. 29.3), мы вывели уравнение прямой. Выразив через координаты расстояние между точками, мы вывели уравнение окружности. Зная уравнения прямых и окружностей, мы можем, например, изучать их взаимное расположение, решая системы соответствующих уравнений. Конечно, дать классификацию взаимного расположения прямой и окружности или двух окружностей можно и без метода координат.

* Приведем пример геометрической задачи, решенной еще в Древней Греции. Методом координат она решается значительно проще, чем чисто геометрическими методами.

Задача. *Что представляет собой множество точек, отношение расстояний которых до двух данных точек есть величина постоянная?*

Решение. Итак, пусть даны две точки A и B и некоторое положительное число k. Если $k = 1$, то, как мы знаем, множество точек M, для которых $\frac{MA}{MB} = 1$, т. е. $MA = MB$, является прямой — серединным перпендикуляром отрезка AB.

Рассмотрим теперь случай, когда $k \neq 1$. Для решения задачи введем прямоугольные координаты с началом в точке B и положительной полуосью x, проходящей через точку A (рис. 52). Тогда, если $|AB| = a$, координаты точек A и B равны $(a, 0)$ и $(0, 0)$ соответственно. Поэтому расстояния от точки $M(x, y)$ до точек A и B выражаются по формулам

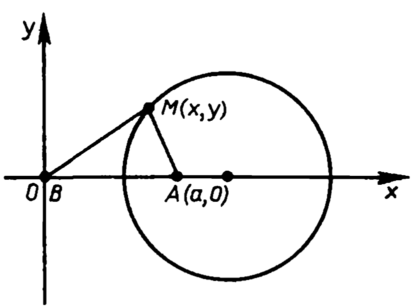


Рис. 52

$$MA = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \text{ и } MB = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (11)$$

Так как по условию задачи $\frac{MA}{MB} = k$, то $MA^2 = k^2 \cdot MB^2$.

В координатах последнее равенство выражается так:

$$(x - a)^2 + y^2 = k^2 \cdot (x^2 + y^2). \tag{12}$$

Из (12) получаем:

$$(1 - k^2)(x^2 + y^2) - 2ax + a^2 = 0. \tag{13}$$

Если $k \neq 1$, то (13) можно переписать так:

$$x^2 + y^2 - \frac{2a}{1 - k^2}x + \frac{a^2}{1 - k^2} = 0,$$

или

$$x^2 - \frac{2a}{1 - k^2}x + \frac{a^2}{(1 - k^2)^2} + y^2 - \frac{a^2}{(1 - k^2)^2} + \frac{a^2}{1 - k^2} = 0.$$

Окончательно получаем:

$$\left(x - \frac{a}{1 - k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2k^2}{(1 - k^2)^2}. \tag{14}$$

Итак, точка $M(x, y)$ удовлетворяет условию $\frac{MA}{MB} = k$, $k \neq 1$, тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению (14). Следовательно, искомая фигура задается уравнением (14). Сравнивая (14) с (1), мы видим, что (14) задает окружность с центром в точке $\left(\frac{a}{1 - k^2}, 0\right)$ и радиусом $r = \frac{ak}{|1 - k^2|}$. Задача решена.

О том, что фигура с условием $\frac{MA}{MB} = k$ при $k \neq 1$ оказывается окружностью, не так просто догадаться и доказать это, не пользуясь координатами[1]. Мы решили задачу тем, что вывели уравнение фигуры.

Таким образом, метод координат и состоит в том, чтобы выразить геометрические условия в виде соотношений с координатами и сделать из них нужные выводы.

2. Пользуясь координатами, можно истолковывать алгебраические и аналитические соотношения и факты геометрически и так применять геометрию к алгебре.

---

[1] Эта окружность называется окружностью Аполлония. Аполлоний Пергский (ок. 260 — ок. 170 лет до н. э.) — знаменитый древнегреческий математик. Важнейшей его работой является сочинение «Конические сечения».

Графическое изображение функций — первый пример такого применения метода координат. Более общая задача возникает, когда дано одно или несколько уравнений с координатами и нужно понять их геометрический смысл, т. е. ответить, в частности, на вопрос, какую фигуру представляет уравнение данного вида. Так, для линейного уравнения мы доказали, что оно задает прямую.

Применение координат в соединении с алгеброй составляет раздел геометрии, называемый аналитической геометрией. Аналитическая геометрия была создана в первой половине XVII века в работах знаменитых французских ученых Рене́ Декарта (1596—1650) и Пьера Ферма́ (1601—1665).

Через метод координат геометрия и алгебра, соединяясь и взаимодействуя, дают богатые плоды, которые они не могли бы дать, оставаясь разделенными.

Задачи к § 31

Задачи к п. 31.1

1. а) Окружность задана уравнением $x^2+y^2=21$. Не рисуя систему координат, установите расположение относительно нее точек: $A(-1,\ 3)$, $B(4,\ -5)$, $C(\sqrt{3},\ -\sqrt{2})$, $D(0,\ \sqrt{21})$.

б) Окружность задана уравнением $(x+1)^2+(y-2)^2=25$. Не рисуя системы координат, установите расположение относительно нее точек: $A(-3,\ 0)$, $B(5,\ 0)$, $C(4,\ 2)$, $D(2,\ 7)$, $E(-4,\ 6)$, $K(3,\ 1)$, $L(-2,\ 3)$.

в) Окружность задана уравнением $(x-2)^2+(y+3)^2=1$. Запишите координаты какой-нибудь точки, которая лежит на этой окружности; точки, которая не лежит на ней.

2. Напишите уравнение окружности: а) с центром O и радиусом 2; б) с центром $(-2,\ 1)$ и радиусом 3; в) с центром $(-3,\ 0)$ и проходящей через O; г) с центром $(0,\ -2)$ и проходящей через точку $(-4,\ 1)$; д) проходящей через точки $(-2,\ 0)$ и $(0,\ 3)$; е) проходящей через точки $(-2,\ -1)$, $(3,\ 0)$, $(0,\ 1)$.

3. Найдите центр и радиус окружности, уравнение которой:

а) $x^2+y^2=5$; б) $x^2+(y+5)^2=4$;

в) $(x-2)^2+y^2=3$; г) $(x+5)^2+(y-1)^2=2$;

д) $(x+3)^2+(y+1)^2=1$; е) $x^2+y^2=a^2$.

4. Является ли уравнением окружности такое уравнение:

а) $x^2 + y^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 = a$; в) $x^2 - y^2 = 0$;

г) $2x^2 + 2y^2 = 3$; д) $x^2 - y^2 = 1$; е) $x^3 + y^3 = 1$?

5. Окружность задана уравнением $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 10$. Пересекает ли эта окружность: а) ось x; б) ось y; в) прямую, уравнение которой $y = -x$; г) прямую, уравнение которой $y = x + 2$; д) окружность, уравнение которой $x^2 + y^2 = 1$?

6. Напишите уравнение окружности: а) проходящей через начало координат и радиус которой 1; б) проходящей через точки $(1, 0)$ и $(-5, 0)$ и радиус которой 10; в) симметричной окружности $(x - 7)^2 + (y + 6)^2 = 16$ относительно начала координат; относительно оси x; относительно оси y.

Задачи к п. 31.3

Основные задачи

7. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки: а) $(-2, 3)$ и $(3, 2)$; б) $(-10, 1)$ и $(1, -10)$. Решите задачу в общем виде.

8. а) Пусть прямая проходит через точки $(-2, 0)$ и $(0, 3)$. Вычислите ее угловой коэффициент. б) Сделайте то же, если даны точки $(-4, -3)$ и $(5, -2)$.

Решите задачу в общем виде.

9. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $(-2, -1)$ и имеющей угловой коэффициент: а) $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{2}{5}$. Решите задачу в общем виде.

10. а) Пусть две прямые, не перпендикулярные оси x, параллельны. Докажите, что их угловые коэффициенты равны. б) Проверьте обратное. в) Как, используя результаты, полученные в пунктах а) и б), узнать, лежат ли три точки с известными координатами на одной прямой?

11. а) Пусть две прямые, не перпендикулярные оси x, перпендикулярны между собой. Докажите, что их угловые коэффициенты k_1 и k_2 связаны зависимостью $k_1 k_2 = -1$. б) Проверьте обратное. в) Задайте прямую каким-либо уравнением, точку какими-либо координатами и напишите уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой.

* * *

12. Какие фигуры, кроме прямой, может задавать уравнение $ax+by+c=0$ в зависимости от значений a, b, c?

13. а) Прямая задана уравнением $3x-2y+1=0$. В каких точках она пересекает оси координат? Под каким углом она их пересекает? На каком расстоянии от начала координат она проходит? б) Решите аналогичные задачи в общем случае.

14. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки:

а) $(0, 0)$ и $(-2, 3)$; б) $(0, a)$ и $(a, 0)$;
в) $(-3, 7)$ и $(4, -3)$; г) $(6, -2)$ и $(6, -3)$.

15. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $(-2, -3)$ и образующей с осью x угол: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 120°; е) 135°; ж) 150°. Какая из них проходит ближе к началу координат?

16. Дана точка $(3, -1)$. Напишите уравнение прямой, проходящей через эту точку и: а) параллельной оси x; б) параллельной оси y; в) образующей с осью x угол 45°; г) образующей с осью x угол 150°; д) параллельной прямой $2x+3y+1=0$; е) перпендикулярной прямой $-3x-2y+1=0$; ж) отсекающей от координатного угла треугольник площадью 6.

17. Напишите уравнения прямых, проходящих через стороны многоугольников (рис. 53), если: а) $AB=BC=CA$; б), в) $ABCD$ — квадрат; г) $ABCD$ — ромб и $\hat{A}=60°$; д) $ABCD$ — трапеция и $AB=BC=CD$; е) $AB=BC=CA$.

Задачи к п. 31.4

18. Нарисуйте фигуру, которая задается таким условием:

а) $x=1$; б) $y=-3$; в) $x(x-1)=0$; г) $(y+2)(y+1)=0$; д) $(x-2)(y+3)=0$; е) $|x|=1$; ж) $|y|=2$; з) $(x+1)^2+(y-2)^2=0$; и) $(x-y)(x+y)=0$; к) $|xy|=1$.

19. Нарисуйте фигуру, которая задается таким условием:

а) $x\leqslant 5$; б) $y\geqslant -2$; в) $-1\leqslant x\leqslant 0$;
г) $xy>0$; д) $x(x-1)\geqslant 0$; е) $x(y-1)\leqslant 0$;
ж) $(x+2)(y-1)\geqslant 0$; з) $y^2\leqslant 1$; и) $x^2\geqslant 4$; к) $\frac{x+1}{y+1}\geqslant 0$.

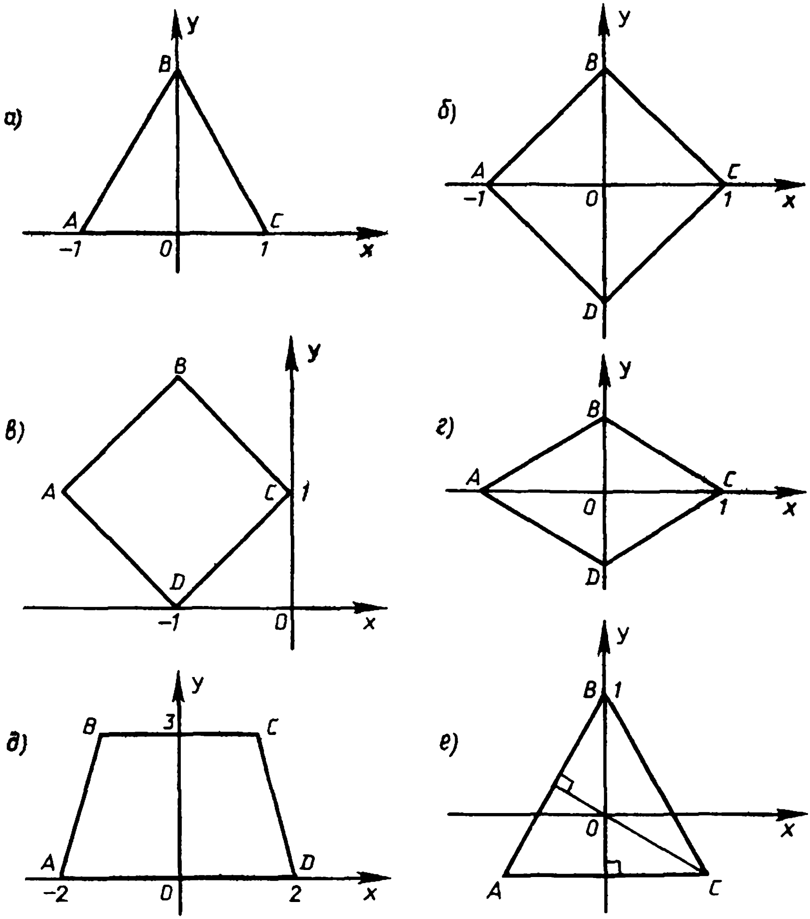


Рис 53

20. Нарисуйте фигуру, которая задается таким условием:

а) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ y \leqslant -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \leqslant -1, \\ y \leqslant 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -2 \leqslant y \leqslant 3. \end{cases}$

21. Нарисуйте фигуру, которая задается таким условием:

а) $\begin{cases} y \geqslant x, \\ y \leqslant 2x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \geqslant -x, \\ y \leqslant x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \geqslant -x+1, \\ y \leqslant x-1, \\ x \leqslant 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y \leqslant -0{,}5x+2, \\ y \geqslant x-2, \\ y \leqslant -5x-2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y \geqslant 3x-2, \\ y \leqslant 3x+2, \\ y \leqslant 3,\ x \geqslant -1. \end{cases}$

22. Нарисуйте фигуру, которая задается таким условием:

а) $x^2+y^2 \leqslant 1$; б) $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$;

в) $\begin{cases} (x-1)^2+y^2 \leqslant 1, \\ x^2+(y-1)^2 \leqslant 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1, \\ (x-1)^2+y^2 \geqslant 1. \end{cases}$

23. Выберите систему координат и запишите уравнения или неравенства, которыми задаются фигуры, изображенные на рисунке 54, если: а) $|AB| = 1$; б) $|AB| = 1$; в) $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — квадраты с общим центром, $AB \| A_1B_1$, $|AB| = 3$, $|A_1B_1| = 2$; г) $ABCD$ и $CLMN$ — квадраты, $DC = CL$, $|AB| = 1$; д) $|ED| = \frac{1}{2}|AB|$, $|BC| = \frac{1}{2}|AE|$, $|AE| = 4$, $|AB| = 2$; е) $|AE| = 4$, $|AB| = 2$, C — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABDE$.

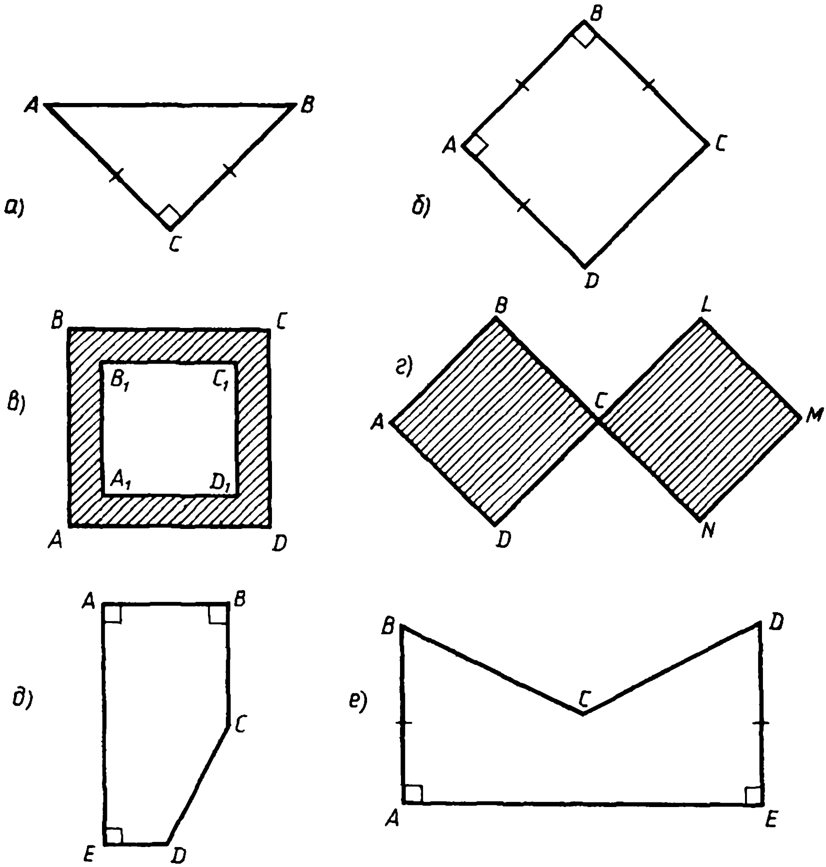


Рис 54

ВЫВОДЫ

Векторы — это величины, характеризующиеся численным значением и направлением, а также правилом сложения.

Численное значение вектора называется его **модулем** или **длиной.**

Особый случай представляет **нулевой вектор** — его длина равна нулю, направления он не имеет. Нуль-вектор изображается точкой.

Ненулевые векторы изображаются направленными отрезками (рис. 1). Направленные отрезки тоже называют векторами.

Поскольку вектор характеризуется длиной и направлением, то равные векторы — это такие векторы, которые имеют равные длины и одинаковые направления (рис. 2).

Для векторов были определены следующие операции.

1. **Сложение векторов.** Сумма двух векторов определяется правилом треугольника (рис. 3) или правилом параллелограмма (рис. 4).

Сложение векторов перестановочно (коммутативно) и сочетательно (ассоциативно), т. е. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ и $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=$ $=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

Для каждого вектора имеется противоположный ему вектор, дающий в сумме с ним нулевой вектор, т. е. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

2. Операция **вычитания векторов** определяется как операция, обратная операции сложения векторов, т. е. $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.

3. **Произведением вектора** $\vec{a}$ **на число** x называется такой вектор $\vec{b}=x\vec{a}$, модуль которого равен произведению модулей вектора $\vec{a}$ и числа x, т. е. $|\vec{b}|=|x||\vec{a}|$, и который, если $\vec{a}\neq\vec{0}$, сонаправлен с $\vec{a}$ при $x>0$ и направлен противоположно $\vec{a}$ при $x<0$ (рис. 17).

Основные свойства операции умножения вектора на число выражаются равенствами:

$x(y\vec{a})=(xy)\vec{a}$ для любых чисел x, y и любого вектора $\vec{a}$;

$(x+y)\vec{a}=x\vec{a}+y\vec{a}$ для любых чисел x, y и любого вектора $\vec{a}$;

$x(\vec{a}+\vec{b})=x\vec{a}+x\vec{b}$ для любого числа x и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Если фиксировать на плоскости некоторую точку O, то положение каждой точки X можно задать ее радиус-вектором $\overrightarrow{OX}$.

Введем на плоскости прямоугольные координаты x, y с началом O и единичными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ координатных осей x, y.

Любой вектор $\vec{v}$ единственным образом представляется в виде

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Числа x, y называются координатами вектора $\vec{v}$. Отложим вектор $\vec{v}$ от точки O: $\vec{v} = \overrightarrow{OX}$ (рис. 21). Тогда согласно теореме о равенстве координат (п. 29.5) координаты вектора $\vec{v}$ — числа x, y — будут одновременно координатами точки X, радиус-вектор которой — вектор $\vec{v} = \overrightarrow{OX}$.

Используя этот результат, мы получили, что координаты вектора, отложенного от произвольной точки, равны разности соответствующих координат его конца и его начала, т. е. вектор

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j},$$

где x_A, y_A — координаты точки A, а x_B, y_B — координаты точки B.

С помощью теоремы Пифагора через координаты вектора $\vec{v}$ выражается его длина:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

а через координаты точек A, B выражается расстояние между этими точками:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

4. Наконец, в этой главе дано общее понятие об уравнении фигуры, а именно: фигура F задается данным уравнением, если точка принадлежит фигуре тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют данному уравнению.

Было выведено уравнение окружности радиуса R с центром в точке $M(x_0, y_0)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 —$$

и доказано, во-первых, что любая прямая на плоскости в прямоугольных координатах задается уравнением вида

$$ax + by + c = 0,$$

где числа a, b одновременно не обращаются в нуль, а, во-вторых, любое уравнение такого вида на плоскости задает прямую.

Если прямая не параллельна оси y, то ее обычно задают уравнением $y = kx + l$, а число k называют угловым коэффициентом этой прямой.

Верно и обратное: графиком линейной функции $y = kx + l$ является прямая.

ГЛАВА VII.

МНОГОУГОЛЬНИКИ И ОКРУЖНОСТИ

§ 32. ХОРДЫ И КАСАТЕЛЬНЫЕ

32.1. Свойства хорд и центральных углов

Напомним, что отрезок, концы которого лежат на окружности, называется ее **хордой** (рис. 55). Хорда, проходящая через центр,— это ее **диаметр**. Перечислим несколько свойств хорд.

Свойство 1. ***Диаметр, проходящий через середину хорды, перпендикулярен хорде.*** И обратно: ***диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.***

Это свойство следует из теоремы о медиане равнобедренного треугольника (рис. 56).

Согласно свойству 1 ближайшей к центру окружности точкой хорды является середина хорды (поскольку эта точка — основание перпендикуляра, опущенного из центра на хорду). Следовательно, справедливо

Свойство 2. ***Расстояние от центра окружности до ее хорды — это расстояние от центра до середины хорды.***

Свойство 3. ***В окружности равные хорды равноудалены от центра.*** И обратно: ***равноудаленные от центра хорды равны.***

Это свойство вытекает из признаков равенства прямоугольных треугольников (или теоремы Пифагора). Действительно, пусть точка C — середина хорды AB, а точка M — середина хорды KL (рис. 57). Если $AB = KL$, то $AC = KM$, т. е. $OC = OM$. Обратно: если $OC = OM$, то $AC = KM$, т. е. $AB = KL$. ■

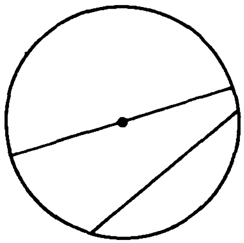


Рис 55

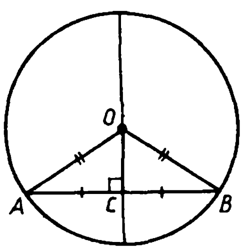


Рис. 56

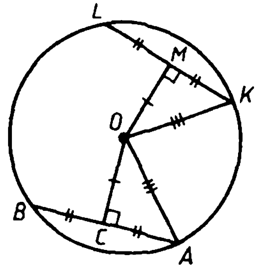


Рис 57

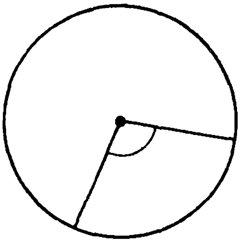


Рис 58

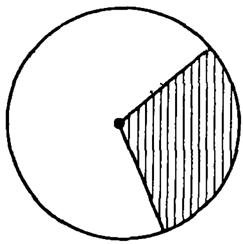


Рис 59

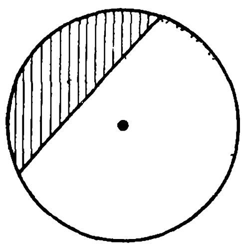


Рис 60

Угол, вершина которого лежит в центре окружности, называется **центральным углом** (рис 58) Можно сказать, что центральный угол — это угол между радиусами окружности Часть круга, ограниченная дугой и радиусами, проведенными в концы дуги, называется **сектором** (рис 59) Любые два радиуса разбивают круг на два сектора

О хорде, соединяющей концы дуги, говорят, что она стягивает эту дугу (рис 60) Часть круга, ограниченная дугой и стягивающей ее хордой, называется **сегментом**. Каждая хорда разбивает круг на два сегмента

Каждая хорда стягивает два центральных угла, в сумме составляющих 360°, и две соответствующие им дуги В свойстве 4 будем иметь в виду центральный угол, не больший 180°

Свойство 4 ***Равные хорды данной окружности стягивают равные центральные углы.*** И обратно ***хорды, стягивающие равные центральные углы, равны.*** (Первое утверждение вытекает из равенства соответственных углов у равных треугольников (рис 61) Обратное ему утверждение вытекает из признака равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними)

Это же свойство можно формулировать и так равные хорды видны из центра окружности под равными углами и наоборот

32.2. Касание прямой и окружности

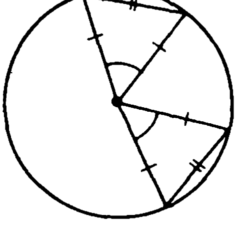


Рис 61

Говорят, что **прямая касается окружности**, если они имеют единственную общую точку (рис 62) Прямую, касающуюся окружности, называют **касательной.**

Теорема *(о касательной к окружности)* ***Через каждую точку окружности проходит касательная — это прямая, перпендикулярная радиусу, проведенному в данную***

точку окружности. Верно и обратное ***если прямая касается окружности, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.***

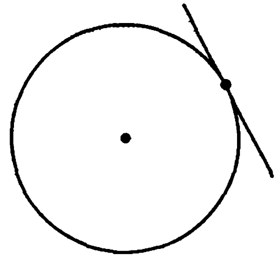


Рис 62

Доказательство Пусть дана окружность S с центром O радиуса R (рис 63) Докажем первое утверждение теоремы Возьмем любую точку A окружности S и проведем радиус OA Затем проведем прямую p, перпендикулярную радиусу OA Любая точка B прямой p, отличная от точки A, удалена от O больше чем на радиус, поскольку наклонная OB длиннее перпендикуляра OA Поэтому точка B не лежит на S Значит, только точка A прямой p лежит на S Итак, прямая p касается окружности S в точке A Первая часть теоремы доказана

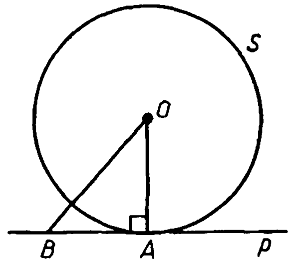
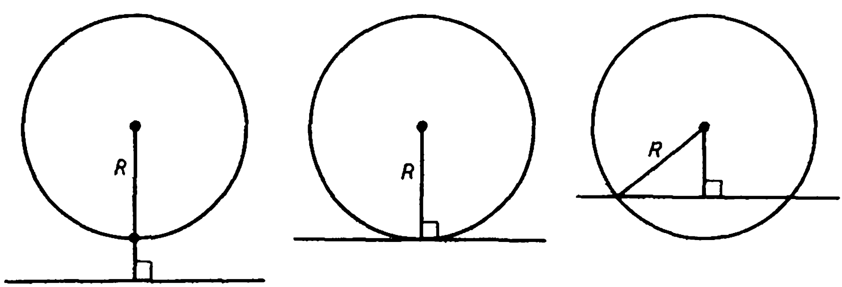


Рис 63

Пусть теперь прямая p касается окружности S в точке A Тогда все остальные точки прямой p лежат вне окружности S Следовательно, они удалены от центра O больше чем на радиус R Так как $OA = R$, то OA — кратчайший из отрезков, соединяющих точку O с точками прямой p Поэтому $OA \perp p$ Теорема доказана

Теперь можно перечислить все возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности (в зависимости от расстояния от центра окружности до прямой)

1) Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса, то данные прямая и окружность не имеют общих точек (рис 64, a)



а) б) Рис 64 в)

2) Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу, то прямая касается окружности (рис. 64, *б*).

3) Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса, то прямая пересекает окружность ровно в двух точках (рис. 64, *в*). (Подумайте, почему окружность не может пересекать прямую более чем в двух точках.)

32.3. Градусная мера дуги окружности

Рис 65

С градусным измерением дуг вы знакомы уже из курса географии и знаете, что значит: точка на Земле имеет координаты, например 60° северной широты и 27° западной долготы (рис. 65). В геометрии градусное измерение дуг определяется так. Между дугами некоторой окружности S и ее центральными углами устанавливается взаимно однозначное соответствие: каждому центральному углу соответствует на окружности та дуга, которую этот угол «высекает» из окружности (рис. 66). (Сформулируйте обратное утверждение.)

Градусная мера дуги окружности определяется как градусная мера центрального угла, который соответствует этой дуге. Вся окружность имеет градусную меру 360°, полуокружность — 180°, четверть окружности — 90°. Если дуга AB имеет градусную меру $\alpha°$, то пишут $\smile AB = \alpha°$

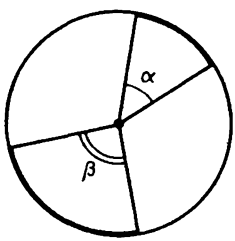


Рис 66

32.4*. Вписанные углы

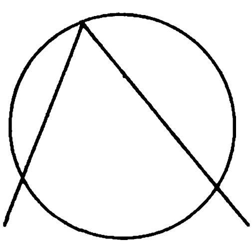


Рис 67

Говорят, что угол **вписан в окружность,** если его вершина лежит на окружности, а его стороны пересекают окружность (рис. 67). При этом вписанный угол опирается на дугу окружности, лежащую между его сторонами.

Об измерении вписанных углов говорится в следующей теореме.

Т е о р е м а *(об измерении вписанных углов)*. ***Вписанный в окружность угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.***

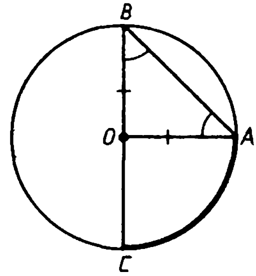


Рис 68

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть угол ABC вписан в окружность S. Возможны три случая.

1) На одной из сторон этого угла (например, на BC) лежит центр O окружности S (рис. 68). Тогда проведем радиус OA и рассмотрим треугольник OAB. Он равнобедренный, так как $OB = OA$. Поэтому в нем $\angle A = \angle B$. А так как угол AOC внешний для треугольника OAB, то

$$\angle AOC = \angle A + \angle B = 2\angle B.$$

Следовательно, $\angle B = \frac{1}{2} \angle AOC$. Но центральный угол AOC измеряется дугой AC, а его половина — угол B — измеряется половиной дуги AC. Для первого случая теорема доказана.

2) Центр O лежит внутри угла ABC (рис. 69). Тогда проведем диаметр BD и разобьем угол ABC на два угла: $\angle ABD$ и $\angle DBC$. Как уже доказано, угол ABD измеряется половиной дуги AD, а угол DBC — половиной дуги DC. Поэтому угол ABC — сумма углов ABD и DBC — измеряется полусуммой дуг AD и DC, т е половиной дуги AC, что и требовалось доказать.

3) Центр O лежит вне угла ABC (рис. 70). Снова проводим диаметр BD и рассматриваем угол ABC как разность получившихся вписанных углов. Проведите подробное доказательство для этого случая самостоятельно.

С л е д с т в и е. ***Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны*** (рис. 71).

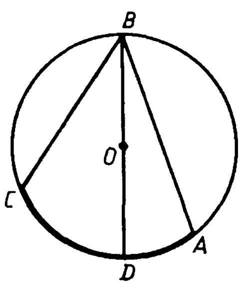


Рис 69

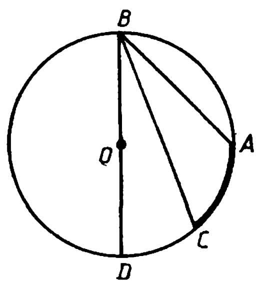


Рис 70

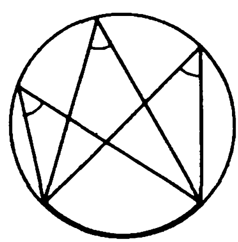


Рис 71

Задачи к § 32

Задачи к п. 32.1

Основная задача

1. В круге проведена хорда. Рассмотрим такие величины: радиус круга, длину хорды, расстояние от центра круга до хорды и угол, под которым она видна из центра. Выберите любые две из этих величин. Пусть они известны. Как найти остальные? Приведите примеры.

* * *

2. Пусть в круге радиуса 3 проведена хорда. На каком расстоянии она находится от центра и под каким углом она видна из центра, если длина хорды равна: а) 1; б) 2; в) 3? Как изменяются эти величины с увеличением длины хорды?

3. В окружности радиуса 1 проведена хорда. Какова ее длина и расстояние до центра, если она видна из центра под углом: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 120°; е) 135°; ж) 150°? Объясните, почему с увеличением этого угла длина хорды увеличивается, а расстояние до центра уменьшается. При каком угле длина хорды равна 1; больше 1; меньше 1? При каком угле длина хорды меньше 0,1; меньше 0,01?

4. В данной окружности расстояние от ее центра до хорды стало увеличиваться. Как будет изменяться угол, под которым она видна из центра? Составьте и решите обратную задачу.

5. Через точку A окружности с центром O и радиусом 2 проведена хорда AB. а) Вычислите длину этой хорды, если $\widehat{OAB} = 30°$; 45°; 60°, φ. б) Объясните, почему при увеличении угла OAB длина хорды уменьшается. в) Вычислите длину хорды, когда она удалена от центра на расстояние $\frac{1}{2}$; 1; $1\frac{1}{2}$. г) Объясните, почему при уменьшении расстояния хорды от центра угол OAB уменьшается.

6. Пусть AB — хорда окружности радиуса 2 с центром O, x — расстояние от центра до хорды. Выразите площадь треугольника OAB как функцию от x: $f(x)$. Вычислите значение $f(x)$ при $x = 1$. Можете ли вы узнать, в каких границах лежит эта площадь?

7. Через точку A данной окружности проводят хорды. а) Объясните, почему из A выходит не больше двух хорд заданной длины. б) Пусть AB и AC — две равные хорды. Докажите, что хорда BC перпендикулярна диаметру. в) Пусть AK и AL — две произвольные хорды. Можно ли сравнить их по длине, не выходя из точки A?

8. Внутри круга находится: а) треугольник; б) квадрат. На сколько частей делится круг прямыми, проходящими через его стороны? Сколько из этих частей являются сегментами? секторами?

9. По границе круга на земле на равных расстояниях устанавливают столбы. Известны радиус круга и расстояние между соседними столбами. Как вычислить расстояние между столбами, идущими через один? между двумя фиксированными столбами?

10. Как вычислить радиус окружности, имея в руках линейку, длина которой меньше радиуса?

Задача к пункту 32.2

Основные задачи

11. Даны окружность и точка вне ее. Откуда следует, что через эту точку можно провести касательную к данной окружности? Сколько можно провести таких касательных?

12. Пусть через точку A проведена касательная AB к данной окружности. а) Через A и центр окружности проведена также прямая, которая встречает окружность в точках C_1 и C_2 (считая от A). Докажите, что $AB^2 = AC_1 \cdot AC_2$. Что отсюда следует? б) Через точку A проведена теперь прямая, пересекающая окружность в точках D_1 и D_2 (считая от A). Докажите, что $AB^2 = AD_1 \cdot AD_2$. Что отсюда следует? в) Через точку A проведены теперь две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках D_1, D_2 и E_1, E_2 (считая от A). Докажите, что $AD_1 \cdot AD_2 = AE_1 \cdot AE_2$. Что отсюда следует? г) Посмотрим на ситуацию в случае в) с другой стороны. Прямые D_1D_2 и E_1E_2 пересеклись за кругом, и оказалось, что $AD_1 \cdot AD_2 = AE_1 \cdot AE_2$. Будет ли это верно, если эти прямые пересекутся в самом круге в точке A?

13. Хорда AB видна из центра под углом φ. Какой угол составляет она с касательной к кругу, проведенной через точку A?

* * *

14. Через точку A окружности с центром O и диаметром AB проходит касательная. На касательной взята точка X. а) Пусть радиус окружности равен 1, $|XA| = 2$. Вычислите $|XO|$ и расстояние от X до круга. Под каким углом виден из точки X диаметр AB? б) Как видно, XO является в треугольнике XAB медианой. Может ли этот отрезок быть в таком треугольнике биссектрисой? в) Пусть отрезок XB пересекает окружность в точке C. При условиях, данных в пункте а), вычислите $|BC|$ и $|ABC|$. г) Точка X стала удаляться по касательной от точки A. Как при этом изменяется расстояние от X до круга; $|BC|$; $|ABC|$? В каких границах происходит это изменение? Может ли быть, что $XC = CB$? д) Составьте задачи, обратные задачам из а).

15. Через точку A окружности с центром O радиуса 1 проведена касательная. По этой окружности, начиная от A, в одном направлении движется точка X. Пусть $\widehat{XOA} = \varphi$. Чему равно расстояние от X до касательной, когда $\varphi = 30°$; $45°$; $60°$; $90°$; $120°$; $135°$; $150°$; $180°$? Составьте и решите обратную задачу.

16. OA и OB — радиусы одной окружности. Через точки A и B проведены касательные к этой окружности. Пусть $\widehat{AOB} = \varphi$. а) Чему равен угол между касательными? б) Пусть OA и OB составляют диаметр окружности. Что отсюда следует? в) Как провести к одной окружности две такие касательные, которые: параллельны? образуют угол $30°$; $90°$; $120°$? образуют вместе с хордой, соединяющей точки касания, равносторонний треугольник?

17. Из точки A вне круга проведены к нему две касательные. а) Докажите, что центр круга равноудален от них. б) Докажите, что отрезки касательных от A до круга равны. в) Пусть известны радиус круга и расстояние от A до круга. Как вычислить угол, под которым этот круг виден из A (т. е. угол между данными касательными)? Как вычислить расстояние между точками касания? г) Пусть теперь известны угол, под которым виден из A круг, и расстояние от A до центра круга. Как вычислить его радиус? д) Пусть точка A удаляется от данного круга. Что происходит с углом, под которым из нее виден этот круг? е) Пусть радиус круга начал расти, а расстояние от A до центра круга остается постоянным. Что происходит при этом с углом, под которым круг виден из точки A? ж) Предложите идею прибора для измерения радиуса круга, основанную на свойствах касательной.

18. Окружность радиуса 2 касается сторон прямого угла. Уместится ли между сторонами угла и окружностью круг радиуса 1? Каков радиус наибольшего круга, умещающегося в этой части плоскости? Решите задачу в общем случае, когда первый радиус равен R, а угол равен φ. (В задаче имеется в виду конечная часть плоскости.)

19. Нарисуйте окружность. Как выбрать на ней три такие точки, чтобы касательные к окружности, проведенные в этих точках, ограничили: а) равнобедренный треугольник; б) равносторонний треугольник; в) прямоугольный треугольник; г) треугольник с заданными углами; д) треугольник с заданными сторонами?

20. Нарисуйте окружность. Как выбрать на ней четыре такие точки, чтобы касательные к окружности, проведенные в этих точках, ограничили: а) параллелограмм; б) ромб; в) прямоугольник; г) квадрат?

21. Нарисуйте окружность с центром O и диаметром AB. Через точку C этой окружности проведена касательная к ней, которая пересекает прямую AB в точке K Проведите отрезки CA, CB, CO и CH — перпендикуляр на AB. На этом рисунке рассмотрим такие величины: $|CH|$, $|OH|$, $|AC|$, $|BC|$, $|BK|$, $|KC|$, $|BH|$, $|AH|$, $|KO|$. а) Пусть известны $|CH|$ и $|OH|$. Как найти остальные? б) Задайте сами длины двух таких из этих отрезков, что можно найти длины всех остальных.

22. Две окружности имеют общий центр (такие окружности называют концентрическими). Докажите, что хорды большей из них, касательные к меньшей, равны.

23. В круге радиуса R проведена хорда. Параллельно ей к этому кругу проведена касательная. Длина хорды равна d. Чему равно расстояние от хорды до касательной? Составьте обратную задачу.

24. Какую линию образуют: а) центры кругов, касающихся данной прямой в данной точке; б) центры равных кругов, касающихся данной прямой; в) центры кругов, касающихся сторон угла?

25. На ровной местности требуется разметить круглую площадку достаточно большого радиуса. Как вы будете действовать?

26. а) Как узнать расстояние с мостика корабля до линии горизонта? б) Как узнать, с какого расстояния с капитанского мостика увидят свет маяка?

§ 33. МНОГОУГОЛЬНИКИ

33.1. Основные определения

С многоугольниками вы знакомились еще в курсе VI класса (в § 12) Напомним основные определения, связанные с многоугольниками

Простым многоугольником называется конечная часть плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной (рис 72), т е замкнутой ломаной, у которой лишь соседние звенья имеют общие точки — общие концы Сама ломаная называется границей этого простого многоугольника, составляющие ее отрезки — его сторонами, а концы этих отрезков — его вершинами

Поскольку мы будем рассматривать лишь простые многоугольники, то в дальнейшем слово «простой» мы опускаем и говорим короче «многоугольник» (Примеры не простых многоугольников изображены на рис 73)

Число сторон многоугольника равно числу его вершин В каждой вершине многоугольника его стороны определяют некоторый **угол многоугольника.** Он может быть как меньше развернутого (рис 74, *а*), так и больше развернутого (рис 74, *б*) Многоугольник называют по числу его углов, т е по числу его вершин тре-

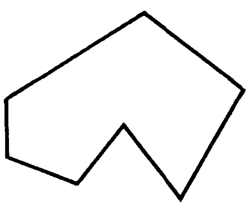


Рис 72

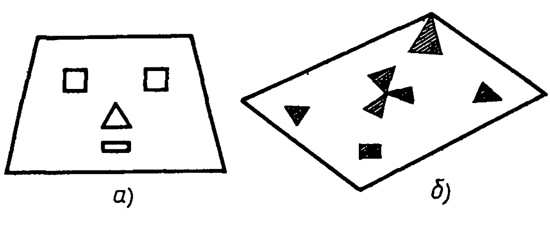


Рис 73

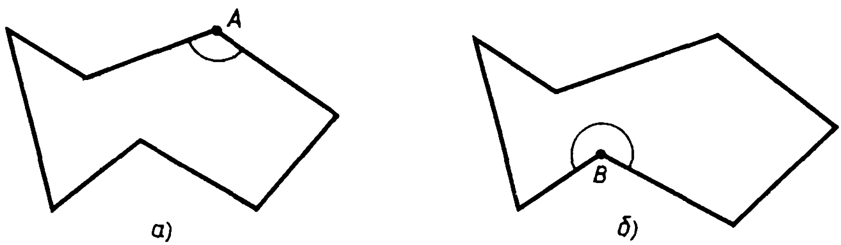


Рис 74

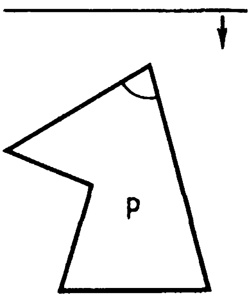


Рис 75

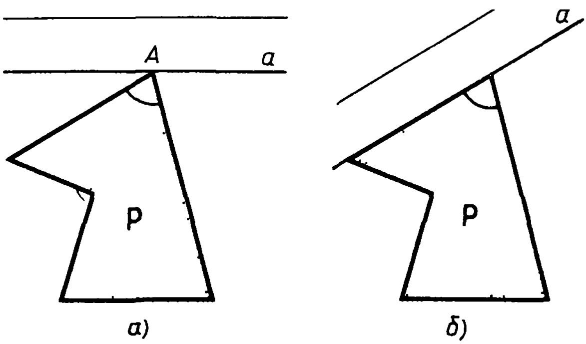


Рис 76

угольник, четырехугольник, пятиугольник и т д Когда число вершин, а значит, и углов многоугольника равно n, то говорят «n-угольник»

О точках многоугольника, не лежащих на его границе, говорят, что они лежат **внутри многоугольника,** и называют их **внутренними точками.**

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий вершины многоугольника, не соединенные стороной

У каждого многоугольника есть углы, меньшие 180°

Докажем это Пусть дан многоугольник P Проведем какую-нибудь прямую, не пересекающую его (рис 75) Будем перемещать ее параллельно в сторону многоугольника В некоторый момент мы получим прямую a, имеющую с многоугольником P хотя бы одну общую точку, от которой многоугольник лежит по одну сторону (рис 76, *а*)

На прямой a лежит хотя бы одна вершина A многоугольника В ней сходятся две его стороны, расположенные с одной стороны от прямой a (считая и тот случай, когда одна из них лежит на этой прямой, рис 76, *б*) При этой вершине угол многоугольника меньше развернутого ■

33.2. Выпуклые многоугольники

Многоугольник называется **выпуклым,** если он лежит по одну сторону от каждой прямой, которая содержит его сторону (рис 77)

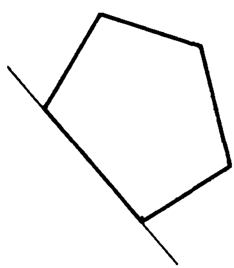


Рис 77

Иначе говоря, выпуклый многоугольник — это такой многоугольник, который можно вырезать из плоскости, разрезая ее по прямым (как из листа бумаги, разрезая его до краев, рис. 78).

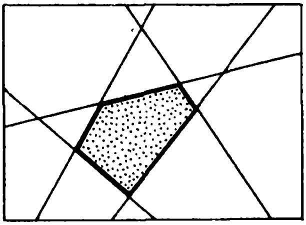


Рис. 78

У выпуклого многоугольника все углы меньше 180°, поскольку каждый из них, как и весь многоугольник, лежит по одну сторону от каждой из его сторон (рис. 79).

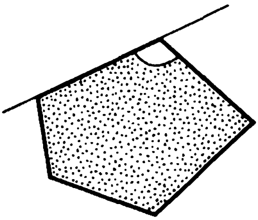


Рис. 79

Выпуклые многоугольники обладают многими интересными свойствами. Эти свойства составляют целый раздел современной геометрии. До сих пор находят новые свойства выпуклых многоугольников.

33.3. Окружность, описанная вокруг многоугольника

Говорят, что многоугольник вписан в окружность, если все его вершины лежат на ней (рис. 80). Тогда об этой окружности говорят, что она **описана вокруг многоугольника.** Другими словами, окружность описана вокруг многоугольника, если она проходит через все его вершины.

Если многоугольник вписан в окружность, то все его стороны являются хордами этой окружности.

О многоугольнике, вписанном в окружность, говорят также, что он вписан в круг, ограниченный этой окружностью.

Каждая сторона вписанного в круг многоугольника делит этот круг на два сегмента. Многоугольник лежит в одном из этих сегментов (подумайте, как это доказать). Поэтому вписанный многоугольник лежит с одной стороны от прямой, содержащей сторону этого многоугольника. Следовательно, любой вписанный в круг многоугольник выпуклый.

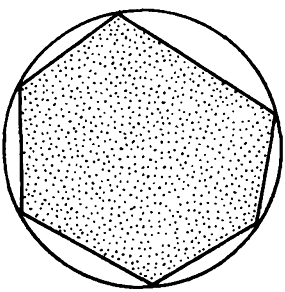


Рис. 80

Из этого следует, что есть многоугольники, около которых нельзя описать окружность: ее нельзя описать, например, вокруг невыпуклого многоугольника.

Ясно, что *вокруг многоугольника можно описать окружность, когда найдется точка, равноудаленная от всех его вершин.* Она и будет центром описанной окружности. Эта точка должна лежать на серединном перпендикуляре каждой стороны многоугольника (рис. 81). Следовательно, *вокруг многоугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда все серединные перпендикуляры сторон этого многоугольника имеют общую точку — центр этой окружности.*

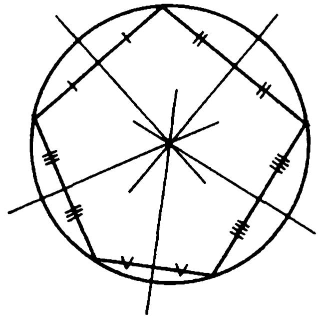


Рис. 81

Вокруг каждого треугольника можно описать окружность (это будет доказано в следующем пункте). Но нельзя описать окружность вокруг каждого четырехугольника. Например, для параллелограмма это можно сделать лишь тогда, когда параллелограмм является прямоугольником (объясните почему).

33.4. Окружность, описанная вокруг треугольника

Докажем лемму.

Лемма. ***Прямые, перпендикулярные пересекающимся прямым, пересекаются.***

Доказательство. Пусть прямые a и b пересекаются, прямая $p \perp a$ и прямая $q \perp b$ (рис. 82). Допустим, что прямые p и q параллельны. Тогда, поскольку $a \perp p$ и $q \parallel p$, то $a \perp q$. Но тогда обе прямые a и b будут перпендикулярны прямой q. Поэтому окажется, что $a \parallel b$. А это противоречит условиям леммы. Итак, допущение, что $p \parallel q$, привело к противоречию. Поэтому p и q пересекаются. Лемма доказана.

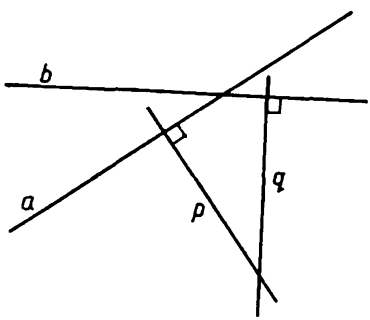


Рис. 82

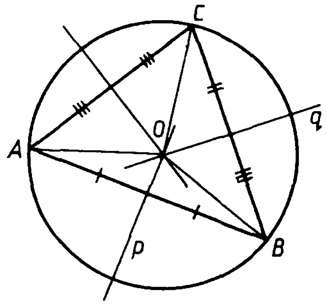


Рис 83

Теорема. ***Вокруг каждого треугольника можно описать окружность. Центр этой окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров сторон данного треугольника.***

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC (рис. 83). Проведем серединные перпендикуляры p и q его сторон AB и BC. Они пересекутся в некоторой точке O (по лемме). Так как $O \in p$, то $OA = OB$, а так как $O \in q$, то $OB = OC$. Поэтому $OA = OB = OC$, т. е. точка O равноудалена от всех трех вершин треугольника ABC. Значит вокруг треугольника ABC можно описать окружность с центром в точке O и радиусом $R = OA$. ■

Зная углы A, B, C и стороны a, b, c данного треугольника ABC (точнее, сторону и противолежащий ей угол), легко найти радиус R описанной вокруг него окружности, а именно:

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad (1)$$

(вспомните, что равенство этих отношений является теоремой синусов). Доказательство этой формулы мы здесь не даем, а в следующем пункте рассмотрим лишь случай прямоугольного треугольника.

33.5. Окружность, описанная вокруг прямоугольного треугольника

Теорема. 1) ***Гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром описанной вокруг него окружности. 2) Множеством вершин прямоугольных треугольников, имеющих общую гипотенузу, является окружность, диаметр которой есть общая гипотенуза этих треугольников.***

Доказательство. 1) Пусть точка O — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC (рис. 84), а точка M — середина катета AC. Так как средняя линия OM параллельна катету BC, то прямая OM перпендикулярна катету AC. Поэтому OM — серединный перпендикуляр отрезка AC. Следовательно, $OA = OB = OC$, т. е. точка O — центр окружности, описанной вокруг треугольника. Ее радиус $R = OA = OB = \frac{1}{2}AB$. Первая часть теоремы доказана.

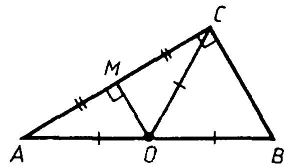


Рис 84

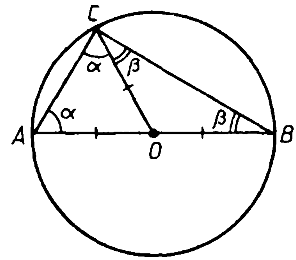


Рис 85

2) Рассмотрим всевозможные прямоугольные треугольники, имеющие данный отрезок AB своей гипотенузой (рис. 85). Как доказано в первой части теоремы, вершины прямых углов всех таких треугольников лежат на окружности S, для которой отрезок AB служит диаметром. Покажем, что верно и обратное. А именно если взять любую точку $C \in S$, отличную от A и B, то получим прямой угол ACB.

Действительно, пусть $\alpha = \widehat{CAB}$ и $\beta = \widehat{CBA}$. Из центра окружности S проведем радиус OC. Тогда $\widehat{ACO} = \alpha$ и $\widehat{BCO} = \beta$. Поэтому сумма углов треугольника ABC равна $2\alpha + 2\beta$, т. е. $2\alpha + 2\beta = 180°$. Следовательно, $\alpha + \beta = 90°$. Но $\widehat{C} = \alpha + \beta$. Значит $\widehat{C} = 90°$ и треугольник ABC прямоугольный. ■

33.6. Окружность, вписанная в многоугольник

Говорят, что **многоугольник описан вокруг окружности,** если все его стороны касаются данной окружности (рис. 86). Тогда об этой окружности говорят, что она **вписана в данный многоугольник.**

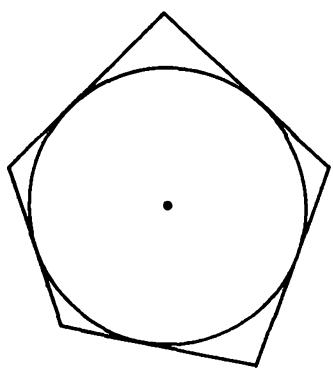


Рис 86

Другими словами, окружность вписана в многоугольник, если она касается всех его сторон. Так как расстояние от ее центра до касатель-

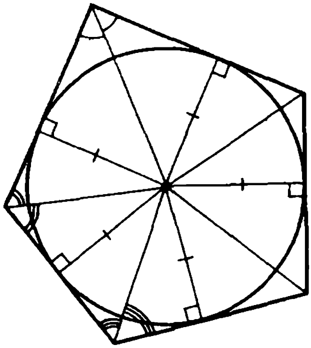


Рис 87

ных прямых равно радиусу окружности (рис. 87), то центр окружности, вписанной в многоугольник, равноудален от всех его сторон. Поэтому в многоугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда найдется точка, равноудаленная от всех сторон этого многоугольника. Такая точка должна лежать на биссектрисе каждого угла многоугольника. Следовательно, *в многоугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда биссектрисы всех углов многоугольника имеют общую точку — центр этой окружности.*

Как будет доказано в следующем пункте, в каждый треугольник можно вписать окружность. Но уже не во всякий четырехугольник можно вписать окружность. Например, для параллелограмма это можно сделать лишь тогда, когда параллелограмм является ромбом (объясните почему).

Если в многоугольник можно вписать окружность, то периметр этого многоугольника P, его площадь S и радиус вписанной окружности r связаны зависимостью

$$S = \frac{1}{2} Pr \qquad (2)$$

Действительно, соединим отрезками центр вписанной окружности с вершинами данного многоугольника Q (рис. 88). Тогда он разобьется на треугольники T_a, T_b, ..., T_k с общей вершиной O, основаниями которых будут стороны a, b, ..., k многоугольника Q. Высотами в этих треугольниках будут радиусы вписанной окружности, проведенные в точки касания. Поэтому

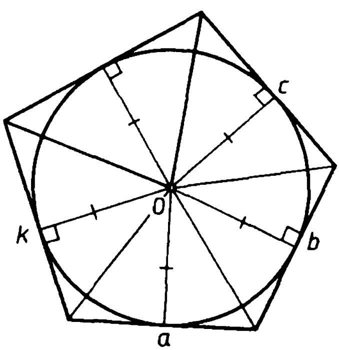


Рис 88

$$S = S(T_a) + S(T_b) + \ldots + S(T_k) =$$

$$= \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \ldots + \frac{1}{2} kr =$$

$$= \frac{1}{2} (a + b + \ldots + k) r = \frac{1}{2} Pr.$$

33.7. Окружность, вписанная в треугольник

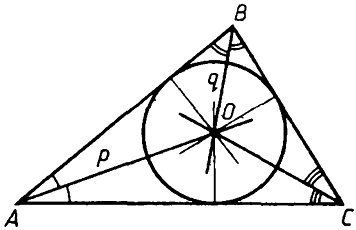


Рис 89

Теорема. ***В каждый треугольник можно вписать окружность. Центр этой окружности лежит на пересечении биссектрис углов треугольника.***

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC (рис. 89). Проведем биссектрисы p и q его углов A и B. Они пересекутся в некоторой точке O. Так как $O \in p$, то она равноудалена от сторон AB и AC, а так как $O \in q$, то она равноудалена от сторон AB и BC. Поэтому точка O равноудалена от всех трех сторон треугольника ABC. Значит через O проходит и биссектриса угла C. Итак, в треугольник ABC можно вписать окружность с центром в точке O. ■

Задачи к § 33

Задачи к п. 33.2

Основные задачи

1. а) Пусть даны все стороны выпуклого четырехугольника. Можно ли вычислить его углы? Если нет, то какой еще элемент четырехугольника достаточно задать, чтобы углы можно было вычислить? Где при этом использовалась выпуклость четырехугольника? б) Сколько сторон и углов выпуклого четырехугольника достаточно знать, чтобы вычислить остальные стороны и углы? Приведите пример таких вычислений.

2. а) Чему равна сумма всех углов выпуклого n-угольника? б) Чему равна сумма всех внешних углов выпуклого n-угольника? в) Ответьте на те же вопросы для невыпуклого четырехугольника.

3. а) Нарисуйте произвольный выпуклый четырехугольник. Докажите, что наибольший отрезок, расположенный в нем,— это его сторона или диагональ. б) Нарисуйте такой выпуклый четырехугольник, у которого наибольший отрезок, расположенный в нем,— сторона (диагональ). в) Может ли быть, что таких наибольших отрезков в выпуклом четырехугольнике не один? г) Решите аналогичные задачи для выпуклого n-угольника.

* * *

4. Нарисуйте выпуклый четырехугольник. а) Нарисуйте второй выпуклый четырехугольник так, чтобы его вершины лежали внутри сторон первого. Докажите, что периметр второго четырехугольника меньше периметра первого. б) Нарисуйте второй выпуклый четырехугольник так, чтобы его вершины лежали внутри первого четырехугольника. Докажите, что периметр второго четырехугольника меньше периметра первого. в) Будут ли эти утверждения верны для невыпуклых четырехугольников? г) Как можно обобщить утверждения а) и б)?

5. Нарисуйте выпуклый пятиугольник. Разбейте его на треугольники: а) соединив одну вершину с остальными; б) соединив точку внутри какой-либо стороны с вершинами; в) соединив какую-нибудь внутреннюю его точку с вершинами. Как использовать эти разбиения для того, чтобы вычислить сумму углов пятиугольника?

6. Нарисуйте выпуклый пятиугольник. Все его стороны продлите до взаимного пересечения. Чему равна сумма острых углов полученной звезды? Обобщите задачу.

Задачи к п. 33.4, 33.5

Основные задачи

7. Установите связь между стороной равностороннего треугольника и радиусом описанной около него окружности.

8. Центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника, может по-разному располагаться относительно этого треугольника: лежать внутри треугольника, лежать на его стороне, лежать вне треугольника. Как его положение зависит от вида угла при вершине равнобедренного треугольника?

9. В равнобедренном треугольнике сторона основания равна a, а боковая сторона равна b. Около него описана окружность. Проведите высоту на основание треугольника и продолжите ее до пересечения с окружностью. Пусть R — радиус круга, h — высота треугольника, d — длина продолжения высоты до окружности. Установите связи между этими величинами. В частности, докажите формулу $a^2 = 4dh$. Выберите две из этих величин и найдите остальные. Используя полученные формулы, предложите идею прибора для измерения радиуса окружности с недоступным центром.

10. а) Пусть точка X лежит внутри круга с диаметром AB, но не на AB. Докажите, что угол AXB тупой. б) Пусть точка X лежит вне круга с диаметром AB, но не лежит на прямой AB. Докажите, что угол AXB острый. в) Проверьте обратные утверждения.

* * *

11. Объясните, почему равносторонние треугольники, вписанные в равные окружности, равны между собой.

12. В окружность радиуса 1 вписан равносторонний треугольник. Одну из его высот продолжили до пересечения с окружностью. Чему равна длина этого продолжения?

13. Пусть AB — диаметр окружности. а) Как выбрать точку X, чтобы треугольник AXB был прямоугольным и равнобедренным? б) Как выбрать точку X, чтобы треугольник AXB был остроугольным? в) Как выбрать точки X и Y, чтобы четырехугольник $AXBY$ был прямоугольником? г) Как выбрать точки X и Y, чтобы четырехугольник $AXBY$ был квадратом? д) Как выбрать точки X и Y, чтобы четырехугольник $AXYB$ был трапецией, диагональ которой перпендикулярна боковой стороне?

14. Пусть точка C лежит на окружности с диаметром AB, точка C_1 — проекция точки C на AB. Рассмотрим величины: R — радиус окружности, $|CC_1|$, $|AC|$, $|BC|$, $|AC_1|$, $|BC_1|$. Установите связи между этими величинами. Выберите две из них и найдите остальные. Приведите численные примеры.

15. AB — диаметр окружности радиуса 1. Точка X лежит на этой окружности. Найдите площадь треугольника AXB, если: а) $|AX| = 1$; б) $|XA| = |XB|$; в) $|XA| = 2|XB|$; г) $\widehat{XAB} = 30°$; д) $\widehat{XBA} = \varphi$.

16. Диаметр делит хорду пополам. Известны длины хорды и одной из частей диаметра. Как вычислить длину оставшейся части диаметра? Приведите численный пример.

17. Дан равнобедренный треугольник. Вычислите радиус описанной около него окружности, если: а) боковая сторона равна 3, а основание равно 2; б) основание равно 1, а угол при вершине равен 90°; в) основание равно 4, а угол при вершине равен 30°, 150°; г) высота, проведенная на основание, равна 1, а угол при основании равен 30°; д) площадь равна S, а угол при основании равен φ.

18. В окружность радиуса 1 вписан равнобедренный треугольник. Чему равна его площадь, если: а) его боковая сторона рав-

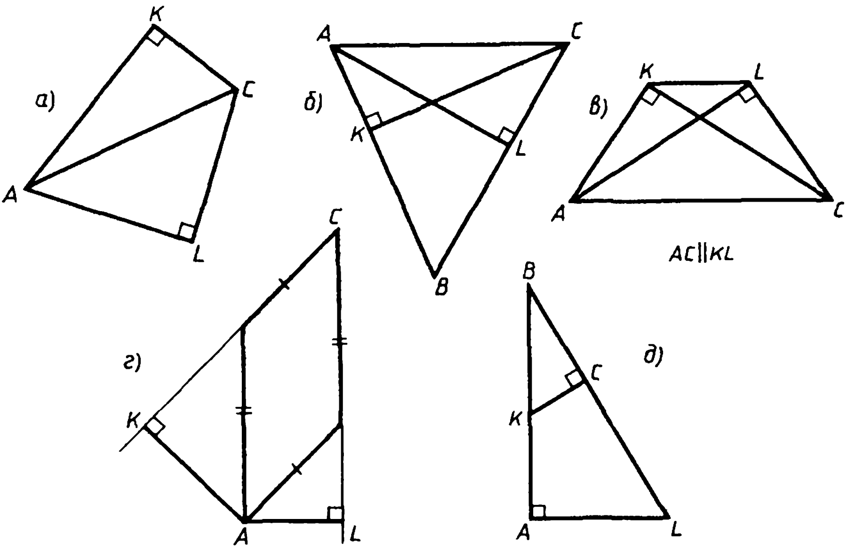


Рис 90

на 1; б) его основание равно 1; в) его высота равна 1; г) угол при вершине равен 120°; д) угол при основании равен 20°; е) угол при вершине равен φ?

19. Объясните, почему точки A, K, C, L лежат на одной окружности (рис. 90).

20. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне. Докажите, что все ее вершины лежат на одной окружности.

21. а) Около равностороннего треугольника описали окружность. Затем соединили отрезками середины его сторон и около получившегося треугольника тоже описали окружность. Чему равно отношение радиусов этих окружностей? б) Каждую сторону равностороннего треугольника ABC продлили на отрезок, равный стороне: AC за вершину C, CB за вершину B, BA за вершину A. Полученные точки соединили отрезками. Чему равно отношение радиусов окружностей, описанных около данного и полученного треугольников?

22. AB — хорда окружности. Точка X движется по этой окружности в одном направлении. При каком положении точки площадь треугольника ABX является наибольшей?

23. Нарисуйте окружность, возьмите на ней любую точку и проведите через нее диаметр. Перпендикулярно этому диаметру проведите хорду. Соедините взятую точку с концами хорды. Получился равнобедренный треугольник (почему?). Теперь начнем двигать хорду параллельно самой себе по направлению к исходной точке. Что будет происходить с площадью треугольника: она будет увеличиваться или уменьшаться? Проверьте свою догадку экспериментом, для чего сами задайте численное значение радиуса окружности и два значения длины хорды. Сможете ли вы доказать свое предположение? Когда, по-вашему, площадь треугольника достигнет наибольшего значения?

24. В окружности проведен диаметр AB. Из точек A и B проведены две параллельные хорды AC и BD. а) Каким по виду будет четырехугольник $ACBD$? б) Пусть $|AC| = x$. Выразите площадь четырехугольника $ACBD$ как функцию от x ($f(x)$), если радиус окружности равен 1. В каких границах изменяется площадь?

25. Из данного круга требуется вырезать треугольник наибольшей площади. Как вы это сделаете?

Задачи к п. 33.7

26. Запишите формулу для вычисления радиуса вписанной в треугольник окружности. Выразите из нее радиус. Чему он равен в равностороннем треугольнике, сторона которого известна?

27. Объясните, почему в равностороннем треугольнике совпадают центры вписанной и описанной окружностей. Установите связь между радиусами этих окружностей.

28. Как вычислить радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, у которого известны: а) катеты; б) гипотенуза и острый угол; в) площадь и острый угол; г) периметр и острый угол? Приведите примеры.

29. В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность. Пусть точка O — ее центр, точка L — точка касания с катетом BC, точка M — точка касания с катетом AC, точка K — точка касания с гипотенузой AB. а) Какой по виду четырехугольник $OLCM$? б) Может ли какая-либо точка касания быть серединой соответствующей стороны? в) Пусть $\widehat{A}$ больше $\widehat{B}$. Какая из хорд этой окружности: KL, LM или MK — ближе к центру? г) Пусть точка K делит гипотенузу на отрезки длиной d_1 и d_2. Чему равна площадь треугольника?

30. Как вычислить радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, у которого известны: а) стороны; б) основание и угол при вершине; в) высота и угол при основании; г) площадь и угол при вершине; д) периметр и угол при основании; е) радиус описанной окружности и угол при вершине; ж) две его высоты; з) основание и расстояние между центрами вписанной и описанной окружности? Приведите примеры.

31. В треугольник вписана окружность. Как вычислить ее радиус, если известны: а) две стороны и угол между ними; б) сторона и два угла? Приведите примеры.

32. В треугольник ABC вписана окружность, точки K, L, M — точки касания со сторонами BC, AC, AB. а) Докажите, что $AM + BK + CL = AL + CK + BM$. б) В каком треугольнике $KM \parallel AC$? в) Подобны ли треугольники $\triangle KLM$ и $\triangle ABC$? г) Как зависит вид $\triangle KLM$ (по сторонам и углам) от вида $\triangle ABC$? д) К какой вершине треугольника ближе всего центр окружности?

§ 34. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

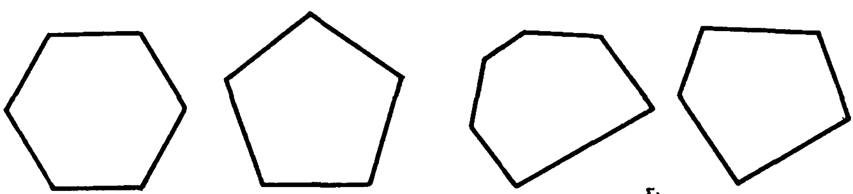
34.1. Определение правильного многоугольника

На рисунке 91, *а* изображены многоугольники, имеющие самую совершенную, наиболее «правильную» форму в сравнении с другими многоугольниками с тем же числом сторон (рис. 91, *б*). Поэтому многоугольники, изображенные на рисунке 91, *а*, называются правильными.

Определение. **Многоугольник называется правильным, если у него все стороны равны и все углы равны.**

Правильные треугольники и четырехугольники вам хорошо известны — это равносторонние треугольники и квадраты. Теперь мы изучим общие свойства любых правильных многоугольников.

Как было доказано в п. 33.1, у каждого многоугольника есть хотя бы один угол, меньший 180°. У правильного многоугольника все углы равны. Значит, все они меньше 180°.



а) *б)*

Рис. 91

34.2. Теорема о центре правильного многоугольника

Теорема. ***Вокруг каждого правильного многоугольника можно описать окружность. В каждый правильный многоугольник можно вписать окружность. Центры этих окружностей совпадают.***

Доказательство. Рассмотрим правильный многоугольник P. Пусть AB и BC — две соседние его стороны. Проведем биссектрисы p и q углов A и B (рис. 92). Лучи p и q пересекутся в некоторой точке O. В треугольнике OAB углы при вершинах A и B равны (как половины равных углов правильного многоугольника P). Поэтому треугольник OAB равнобедренный, т. е. $OA = OB$. Проведем теперь отрезок OC и рассмотрим треугольники OAB и OBC. Они равны, так как, во-первых, $BA = BC$ (как стороны правильного многоугольника), во-вторых, сторона OB у них общая и, в-третьих, $\angle OBA = \angle OBC$ (так как BO — биссектриса угла B). Поэтому $\triangle OBC$, как и $\triangle OAB$, равнобедренный. Следовательно, $OC = OB = OA$ и $\angle OCB = \angle OBC = \angle OAB = \angle OBA$. Так как углы B и C в многоугольнике P равны, а угол OBC — половина угла B, то равный ему угол OCB — половина угла C. Следовательно, CO — биссектриса угла C.

Итак, мы доказали, что точка O принадлежит биссектрисам углов A, B, C многоугольника P и равноудалена от точек A, B, C.

Последовательно соединяя отрезками OD, OE и т. д. точку O с остальными вершинами D, E и т. д. многоугольника P (рис. 93, *а*) и повторяя проведенные рассуждения, докажем, что эти отрезки также равны друг другу и являются биссектрисами углов D, E и т. д. Следовательно, точка O равноудалена от всех вершин многоугольника P. Поэтому точка O является центром окружности, описанной вокруг P. Кроме того, точка O принадлежит биссектрисам

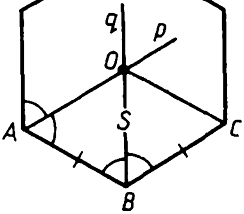


Рис. 92

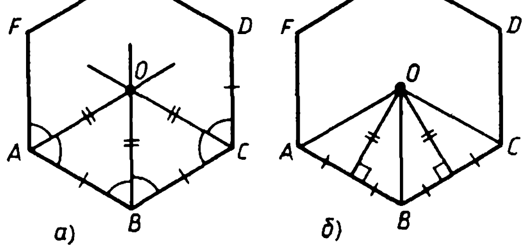


Рис. 93

всех углов многоугольника P. *Поэтому точка O равноудалена* от всех сторон многоугольника P и является центром окружности, вписанной в P. Радиусами окружности, вписанной в P, являются отрезки, соединяющие O с серединами сторон многоугольника P,— высоты равнобедренных треугольников OAB, OBC и т. д. (рис. 93, *б*). Теорема доказана.

Определение. **Общий центр окружностей, вписанных в правильный многоугольник и описанных вокруг него, называется центром этого многоугольника.**

34.3. Следствия из теоремы о центре правильного многоугольника

Следствие 1. ***Правильный многоугольник выпуклый.***

Это вытекает из доказанной теоремы, так как в п. 33.3 установлено, что все вписанные в окружность многоугольники выпуклые.

Следствие 2. ***Сторона а правильного n-угольника связана с радиусом R описанной окружности формулой***

$$a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}, \qquad (1)$$

а с радиусом вписанной окружности формулой

$$a = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}. \qquad (2)$$

Доказательство. Радиусы описанной и вписанной окружностей, проведенные в вершины правильного n-угольника и в середины его сторон, разбивают его на $2n$ равных прямоугольных треугольников с общей вершиной O (рис. 94). Гипотенузы этих треугольников равны R, их катеты из точки O равны r, противолежащие вершине O катеты равны $\frac{a}{2}$, а их углы при вершине O равны $\frac{180^\circ}{n}$. Поэтому

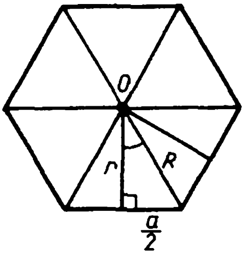


Рис 94

$$\frac{a}{2} = R\sin\frac{180^\circ}{n} \text{ и } \frac{a}{2} = r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}.$$

Отсюда и получаем равенства (1) и (2).■

Из следствия 2 вытекает

Следствие 3. ***Периметр P правильного n-угольника выражается через радиусы описанной и вписанной окружностей и вычисляется по формулам***

$$P = 2nR\sin\frac{180^\circ}{n} \tag{3}$$

и

$$P = 2nr\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}. \tag{4}$$

Следствие 4. ***Периметры правильных n-угольников относятся как радиусы описанных окружностей.***

Это следствие вытекает из формулы (3).

34.4. Построение правильных многоугольников

Задача о построении циркулем и линейкой правильного n-угольника (или, что равносильно, о делении окружности на n равных дуг) имеет большую и интересную историю. Вы хорошо знаете, как построить правильный (равносторонний) треугольник и правильный четырехугольник (квадрат).

Ознакомившись со свойствами правильных многоугольников, вы легко поймете, как построить правильный шестиугольник: радиусами описанной окружности он разбивается на шесть правильных треугольников (рис. 95, *а*). Поэтому его сторона равна радиусу описанной окружности. Значит, если от некоторой точки A окружности S начать откладывать ее хорды, равные радиусу (рис. 95, *б*), то окружность разобьется на шесть равных дуг, а точки деления будут вершинами правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность.

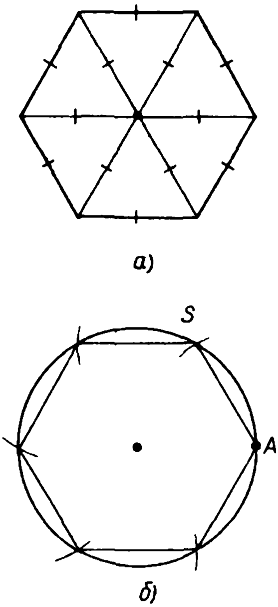


Рис 95

Ясно, что если уже построен некоторый правильный n-угольник P_n, то циркулем и линейкой легко можно построить правильный $2n$-угольник P_{2n}. Для этого надо

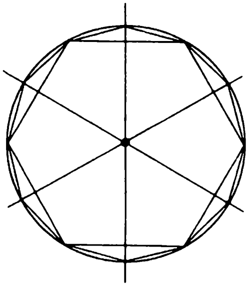


Рис. 96

описать вокруг P_n окружность S и разделить пополам каждую дугу этой окружности, стягиваемую стороной многоугольника P_n (рис. 96). Точки деления этих дуг вместе с вершинами многоугольника P_n и будут вершинами правильного $2n$-угольника P_{2n}. Мы описали так называемый процесс удвоения сторон правильного n-угольника. Повторяя этот процесс, можно затем построить правильный $4n$-угольник, правильный $8n$-угольник и вообще любой правильный 2^m n-угольник (m — натуральное).

З а м е ч а н и е. Какие правильные n-угольники можно построить циркулем и линейкой? Например, можно ли построить правильный пятиугольник и правильный семиугольник? Оказывается, что правильный пятиугольник циркулем и линейкой построить можно, а правильный семиугольник — нельзя. Задача о построении циркулем и линейкой правильных многоугольников изучалась еще древнегреческими геометрами, а окончательно решена была лишь в 1801 году великим немецким математиком Карлом Гауссом (1777—1855). К. Гаусс, используя средства алгебры, доказал, что циркулем и линейкой могут быть построены лишь те правильные n-угольники, когда число n имеет следующее разложение на множители:

$$n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r,$$

где m — целое неотрицательное число, а p_1, ..., p_r — простые числа вида $2^{2^k}+1$ (k — натуральное). Число 5 имеет такой вид, а число 7 не имеет.

Конечно, не исключается, что множителей p_1, ..., p_r вообще нет (например, для $n = 4, 8, \ldots$).

Но приближенное разбиение окружности циркулем на любое число равных частей (а значит, и построение циркулем и линейкой любого правильного n-угольника) с любой сколь угодно высокой точностью всегда осуществимо. Это и делается с древнейших времен реально на практике, например, когда изготовляют транспортиры или астрономические инструменты и другие предметы, в которых окружность надо разделить на равные части.

Задачи к § 34

Основные задачи

1. Если в правильном многоугольнике соединить отрезками последовательно середины сторон, то получится новый правильный многоугольник. Докажите это. Придумайте другие способы получения правильного многоугольника, исходя из имеющегося правильного многоугольника.

2. Пусть известна сторона правильного многоугольника. Как вычислить: а) угол, под которым видна из центра его сторона; б) угол при его вершине; в) его площадь?

* * *

3. Объясните, почему в правильном многоугольнике: а) равны диагонали, соединяющие его вершины через одну (а через две?); б) все его стороны видны из центра под одним и тем же углом; в) его наибольшая диагональ проходит через его центр при четном числе сторон и не проходит через его центр при нечетном числе сторон; г) из любой его вершины каждая сторона (кроме тех, которым эта вершина принадлежит) видна под одним и тем же углом; д) все треугольники, вершины которых находятся в вершинах данного многоугольника, имеют один и тот же радиус описанной окружности.

4. Нарисуйте окружность. Постройте правильный многоугольник, вписанный в нее, с числом сторон: а) 3; б) 4; в) 6.

5. Дан правильный пятиугольник. а) Докажите, что все его диагонали равны. б) Докажите, что каждая его диагональ параллельна какой-либо его стороне. в) Вычислите, в каком отношении делится каждая его диагональ теми диагоналями, которые ее пересекают. г) Какой по виду многоугольник ограничен всеми его диагоналями? д) Какую часть составляет площадь этого многоугольника от площади данного пятиугольника?

6. Дан правильный шестиугольник. Можно ли для него решить задачи, аналогичные задачам из № 5?

7. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — правильный шестиугольник, $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1A_6} = \vec{b}$. Разложите по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{A_3A_4}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_5}$, $\overrightarrow{A_5A_2}$.

8. Запишите формулу, связывающую сторону правильного n-угольника с радиусом R описанной окружности. а) Выразите из нее радиус. б) Как из этой формулы получить число сторон правильного вписанного многоугольника? Например, в окружность захотели вписать правильный многоугольник со стороной R. Сколько у него будет сторон? в) Пусть $R = 1$. Вычислите сторону правильного вписанного многоугольника, если число сторон равно 3; 4; 6; 10. г) Пусть сторона правильного многоугольника равна 1. Вычислите радиус описанной окружности, если число сторон равно 3; 4; 6; 10.

9. В условии предыдущей задачи замените правильный вписанный многоугольник на правильный описанный многоугольник и ответьте на те же вопросы.

10. Как вычислить площадь правильного n-угольника, если известны: а) сторона; б) радиус описанной окружности; в) радиус вписанной окружности? Приведите примеры.

11. В окружность вписали правильный многоугольник. Построили новый правильный многоугольник, вписанный в эту окружность, число сторон которого в два раза больше, чем у данного. Сравните площади и периметры исходного и полученного многоугольников. Такую процедуру можно продолжать сколь угодно долго. Однако получающиеся площади и периметры будут ограничены. Почему?

12. Докажите, что: а) периметры двух правильных n-угольников относятся как радиусы вписанных в них окружностей; б) площади двух правильных n-угольников относятся как квадраты радиусов описанных около них окружностей, а также как квадраты радиусов вписанных в них окружностей.

13. Пусть сторона правильного n-угольника равна d. Чему равна сторона правильного $2n$-угольника, если оба они вписаны в одну окружность (описаны около одной окружности)?

§ 35. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

35.1. Длина кривой линии

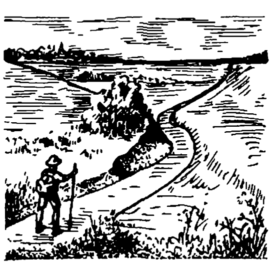


Рис. 97

Длину сравнительно короткого пути часто измеряют шагами, будь он прямой или нет, как, скажем, извивающаяся дорога (рис. 97). Длину железнодорожного пути или шоссе можно измерять, считая промежутки между телеграфными столбами. Длину кривой линии на чертеже или на карте измеряют фиксированным раствором циркуля (рис. 98). Если линия мало искривлена, то можно брать достаточно большие расстояния, и это даст довольно точное значение длины. Если же линия сильно извивается, то нужны очень малые шаги. Во всех этих случаях длину линии измеряют последовательными шагами — отрезками, концы которых лежат на данной линии. Эти отрезки образуют ломаную, ее длина равна сумме длин отрезков, и она дает более или менее точное значение длины линии. Этот практический способ и лежит в основе определения длины линии в геометрии.

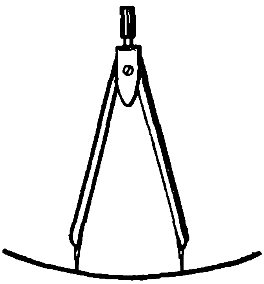


Рис. 98

Ломаная, вершины которой последовательно лежат на данной линии от одного ее конца до другого, называется **ломаной, вписанной в данную линию** (рис. 99).

Линия может быть и замкнутой (например, окружность или дистанция кросса, старт и финиш которого находятся в одном месте). Измеряя длину замкнутой линии, вписывают в нее замкнутую ломаную (рис. 100). К примеру, вершины такой ломаной для дистанции кросса — это флажки вдоль дистанции, задающие ее разметку.

Длина кривой линии приближенно равна длине вписанной ломаной, и вычисляется она тем точнее, чем меньше звенья ломаной и чем чаще располагаются вершины ломаных на данной кривой.

Это приводит нас к определению того, что считается в геометрии длиной кривой линии, или **кривой.**

Длиной кривой, измеренной в данной единице, называется такое число, от которого длины вписанных в кривую ломаных отли-

Рис. 99

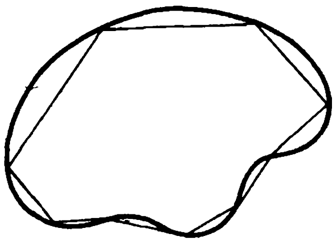


Рис 100

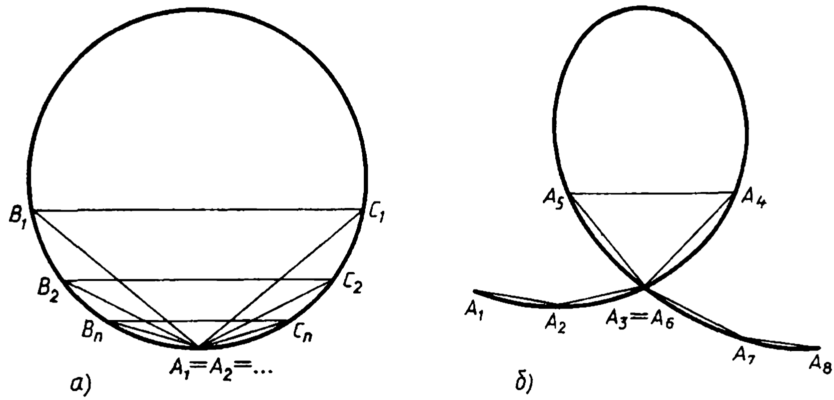


Рис. 101

чаются сколь угодно мало, как только длины звеньев ломаных достаточно часто располагаются на кривой. В этом случае расстояние от любой точки кривой до ближайшей вершины вписанной ломаной становится сколь угодно малым, а длины звеньев ломаных тоже становятся сколь угодно малыми. Чем гуще располагаются вершины ломаных на данной кривой, тем ближе подходят их длины к длине кривой.

Кратко говорят так: *длиной кривой называется предел длин вписанных в нее ломаных, когда вершины ломаных сколь угодно часто располагаются на данной кривой* (при этом длина наибольшего из звеньев ломаной становится сколь угодно малой, или, как говорят, стремится к нулю).

Замечание. Пусть кривая L незамкнута и не имеет самопересечений. Тогда из условия, что длина наибольшего звена вписанной в L ломаной становится сколь угодно малой, уже следует, что вершины этой ломаной расположены на L достаточно густо. Если же L замкнутая или имеет самопересечения, то этого утверждать нельзя, как показывают примеры, приведенные на рисунках 101, *а* и 101, *б*. Поэтому в определении длины кривой мало говорить только об уменьшении длин звеньев ломаной, надо еще сказать и о том, что ее вершины располагаются все гуще на кривой.

35.2. Длина окружности

Вычисляя длины кривых, можно брать любые вписанные в них ломаные, лишь бы длины наибольших из их звеньев стремились к нулю и вершины этих ломаных располагались на кривой достаточно часто. Для любой окружности таким свойством обладают правильные многоугольники, вписанные в эту окружность, когда число их сторон неограниченно увеличивается (рис. 102). Поэтому, измеряя длину окружности, рассматривают вписанные в нее правильные n-угольники и вычисляют их периметры. Чем больше n, тем периметр такого многоугольника меньше отличается от длины окружности. *Длина окружности равна пределу периметров вписанных в нее правильных многоугольников, когда число их сторон неограниченно увеличивается.* О зависимости длины окружности от ее радиуса говорится в следующей теореме.

Теорема *(о длине окружности).* ***Отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от диаметра окружности.***

Доказательство. Пусть S_1 и S_2 — две окружности с радиусами R_1 и R_2, а Q_1 и Q_2 — вписанные в них правильные n-угольники (рис. 103). Обозначим через P_1 и P_2 периметры этих многоугольников. Периметры правильных n-угольников относятся как радиусы описанных окружностей (следствие 4 п. 34.3). Поэтому

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}. \qquad (1)$$

Если неограниченно увеличивать n (например, удваивать его), то периметры P_1 и P_2 будут стремиться к длинам L_1 и L_2 окружностей S_1 и S_2. При этом отношения периметров будут оставаться равными отношению радиусов. Поэтому и отношение длин окружностей S_1 и S_2 будет равно отношению их радиусов, т. е.

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2}. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что

$$\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}, \qquad (3)$$

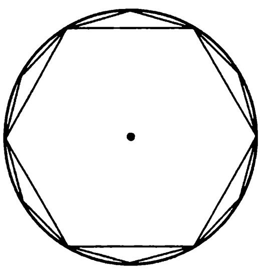


Рис. 102

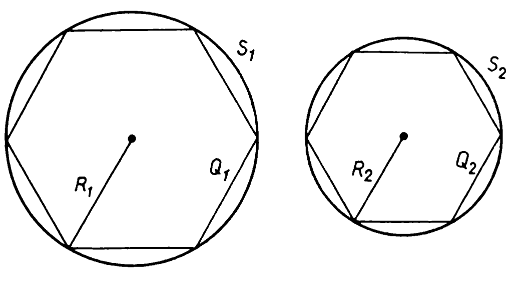


Рис. 103

а потому

$$\frac{L_1}{2R_1} = \frac{L_2}{2R_2}, \tag{4}$$

т. е. отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от диаметра. Теорема доказана.

Как вы знаете, отношения (4) обозначают греческой буквой π. Поэтому длина L окружности радиуса R выражается формулой

$$L = 2\pi R. \tag{5}$$

Равенство $L = 2\pi R$ означает, что длина окружности прямо пропорциональна ее радиусу с коэффициентом пропорциональности 2π.

35.3. О числе π

По определению число π — это отношение длины окружности к ее диаметру. π — число иррациональное, так что оно может быть представлено десятичной или иной дробью лишь приближенно. Как вам известно, приближенно $\pi = 3{,}14...$. Более точное значение: $\pi = 3{,}1416$. Его легко запомнить по фразе: «Что я знаю о кругах». Здесь число букв в каждом слове дает соответствующую цифру в записи значения π.

Вычислять π с любой точностью можно, находя периметры правильных многоугольников со все бóльшим числом сторон. Периметры P будут приближаться к длине окружности L, а отношение их к радиусу окружности $\frac{P}{R}$ будет приближаться, или, как говорят, стремиться, к $\frac{L}{R}$, т. е. к 2π (пишут: $\frac{P}{R} \to 2\pi$). Если брать половины периметров, то получим $\frac{P}{2R} \to \pi$.

У правильного шестиугольника полупериметр равен $3R$. Поэтому $\frac{P}{2R} = 3$. Это дает первое приближенное значение для π. Далее можно взять 12-угольник. Вычисляя его сторону a_{12}, получим:

$$a_{12} = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(R - R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx R \cdot 0{,}518... .$$

Полупериметр 12-угольника будет $6a_{12}$. Отсюда $\pi \approx 3{,}11...$. Дальше можно взять 24-угольник и получить еще более точное значение π. Сейчас более точные значения π находят средствами высшей математики.

Знание достаточно точных приближений числа π имеет большое практическое значение, так как число π постоянно встречается в конкретных задачах. Поэтому такие приближения старались найти уже в глубокой древности. Так, в папирусе древнеегипетского жреца Ахмеса (ок. 1700 до н. э.) содержится довольно хорошее приближение для π:

$$\left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{256}{81} \approx 3{,}1605.$$

Великий древнегреческий ученый Архимед (ок. 287—212 до н. э.) в своем сочинении «Об измерении круга» дал такие приближения:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7},$$

выразив через диаметр окружности периметр 96-угольника. Данное Архимедом приближение $3\frac{1}{7} \approx 3{,}14$ вполне удовлетворительно для большинства практических задач.

Индийский математик и астроном Ариабхата (ок. 475) нашел еще более точное приближение: $\pi \approx 3{,}1416$. А работавший в Самарканде в знаменитой обсерватории Улугбека в XV веке математик аль-Каши, рассмотрев вписанный и описанный многоугольники с 800 335 168 сторонами, дал приближение для π с 16 верными знаками.

Обозначение буквой π отношения длины окружности к ее диаметру ввел в общее употребление в XVIII веке великий математик Леонард Эйлер (1707—83). Обозначение числа π происходит от первой буквы греческого слова *περίφερεία* — периферия, что означает «окружность». Эйлер, применяя методы высшей математики, нашел для π приближение с 153 верными знаками. В XIX веке англичанин В. Шенкс, проработав 15 лет, нашел приближение для π с 707 десятичными знаками. Но в 1948 году с помощью ЭВМ было получено значение π с 2035 знаками и найдена ошибка у Шенкса в 527-м знаке. Конечно, для практики такие приближения π не нужны, хотя современные ЭВМ могут находить приближения π с десятками тысяч знаков.

35.4. Длина дуги окружности

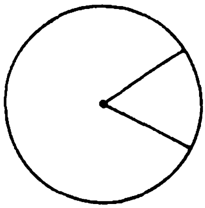


Рис. 104

Два радиуса, проведенные из центра круга, делят его на два сектора, а его окружность на две дуги. Эти дуги соответствуют двум центральным углам (рис. 104). Углу в 1° соответствует дуга, равная

$$\frac{1}{360}2\pi R = \frac{\pi}{180}R.$$

Длина дуги, соответствующей углу в n градусов, будет:

$$l = \frac{\pi n}{180}R. \qquad (6)$$

Задачи к § 35

Задачи к п. 35.2

Основная задача

1. Запишите формулу длины окружности. а) Выразите из нее радиус. б) Пусть радиус окружности увеличился в два раза. Во сколько раз увеличилась ее длина? Сформулируйте общий вывод и докажите его. Сформулируйте и докажите обратное утверждение. в) Пусть радиус окружности R увеличился на r. Как изменилась длина окружности? Решите обратную задачу. Сравните полученные результаты.

* * *

2. а) В правильный треугольник вписана окружность и около него описана окружность. Вычислите отношение их длин. б) Обобщите задачу а) на случай правильного многоугольника. в) Как изменяется это отношение (см. б)) при увеличении числа сторон правильного многоугольника?

3. Чему равна длина окружности, описанной около: а) прямоугольного треугольника с катетами d_1 и d_2; б) прямоугольного треугольника с катетом d и острым углом φ против него; в) равнобедренного треугольника с боковой стороной d и углом при вершине φ; г) равнобедренного треугольника с основанием d_1 и боковой стороной d_2; д) треугольника со сторонами 4, 5, 6; е) прямоугольника со стороной d и острым углом φ между диагоналями; ж) равнобедренной трапеции, боковые стороны которой лежат на перпендикулярных прямых и три стороны которой равны 1?

В каждом случае сравните длину окружности с периметром фигуры, вписанной в нее. Какое предположение можно сделать? Как его доказать?

4. Чему равна длина окружности, вписанной в: а) равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 1; б) прямоугольный треугольник с гипотенузой d и острым углом φ; в) равнобедренный треугольник с высотой к основанию 1 и углом при основании φ; г) равнобедренный треугольник с основанием d и углом при вершине φ; д) ромб со стороной d и углом φ; е) прямоугольную трапецию, у которой основания 1 и 2, а высота 1?

5. Окружности с общим центром называются концентрическими, а расстояние между двумя концентрическими окружностями называется шириной кольца. а) Докажите, что ширина кольца равна разности их радиусов. б) Какая зависимость есть между шириной кольца и длинами окружностей, его ограничивающих? в) Имеется множество концентрических окружностей, каждые две из которых находятся на расстоянии d. Выберите любые две из них. Чему равна разность их длин? г) Представьте себе, что Землю обтянули по экватору веревкой, а потом увеличили ее длину на 1 м и образовали из нее окружность, концентричную экватору. Пролезет ли в образовавшийся зазор ваша кисть руки?

6. Воду из колодца поднимают с помощью ворота. Как узнать глубину колодца?

7. а) Колесо катится по прямой. Какая зависимость существует между его радиусом, числом оборотов, которое оно сделало, и длиной пройденного им пути? б) Цирковой велосипедист едет на велосипеде, колеса которого имеют разные радиусы. Он объехал границу арены один раз. Как узнать, во сколько раз больше обернулось за это время меньшее колесо? Изменится ли полученный результат, если радиус арены будет в два раза больше? в) Два зубчатых колеса сцеплены между собой. Их радиусы R_1 и R_2. Первое из них сделало n оборотов. Сколько сделало второе? г) Пусть теперь есть третье колесо, которое имеет радиус R_3 и сцеплено со вторым. Сколько оборотов сделало оно? Что интересного в полученном результате? А сколько оно сделает оборотов, если, кроме второго, будет еще сцеплено и с первым?

8. Круглый водоем надо оградить забором. Требуется подсчитать число столбов, на которых будет крепиться забор. Как это можно сделать? Приведите пример.

9. Можете ли вы найти длину намотанной на катушку магнитной ленты, не разматывая ее?

Задачи к п. 35.4

Основная задача

10. Запишите формулу для вычисления длины дуги окружности. а) Из нее выведите, что длина дуги окружности пропорциональна величине центрального угла, соответствующего этой дуге, при постоянном радиусе и пропорциональна радиусу окружности при постоянном центральном угле, соответствующем этой дуге. б) Выразите из этой формулы радиус окружности. Каков характер его зависимости от остальных величин? в) Выразите из этой формулы величину центрального угла, соответствующего данной дуге. Каков характер ее зависимости от остальных величин?

* * *

11. На окружности радиуса 1 отмечена некоторая дуга. Чему равна ее длина, если эта дуга видна из центра под углом:

а) $30°$; б) $135°$; в) $240°$; г) $315°$; д) $70°$; е) $184°$; ж) φ?

12. Под каким угом видна из центра окружности радиуса 1 дуга этой окружности, длина которой равна:

а) π; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{2\pi}{3}$; д) $\frac{7\pi}{4}$; е) $\frac{11\pi}{6}$; ж) 1?

13. На окружности длиной L взята дуга длиной L_1. Под каким углом она видна из центра окружности? Выберите сами числовые данные и получите результат.

14. L — длина дуги окружности. Эта дуга видна из центра окружности под углом φ. а) Какова длина самой окружности? б) Под каким углом видна из центра этой окружности ее дуга длиной $2L$? длиной $\frac{1}{3}L$? длиной L_1?

15. Рассматриваются дуги, меньшие одной и той же полуокружности. Объясните, почему: а) равным по длине дугам соответствуют равные хорды, соединяющие их концы; б) более длинной дуге соответствует более длинная хорда; в) верны утверждения, обратные а) и б).

16. Из точки проводятся две касательные к одной окружности. Объясните, почему по мере удаления точки от окружности длина ближайшей к этой точке дуги окружности увеличивается.

17. В угол φ вписана окружность. В каком отношении разделилась ее длина точками касания? Как изменяется это отношение при изменении φ? При каком угле φ это отношение равно 2?

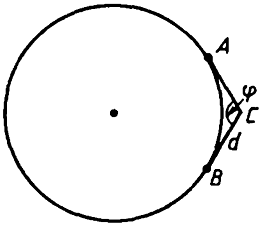


Рис 105

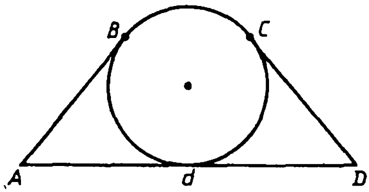


Рис. 106

18. На рисунке 105 CA и CB — касательные к окружности. Как найти неизвестную длину дуги AB? Чему она равна, если $d = 1$; $\varphi = 120°$?

19. На рисунке 106 AB и CD — касательные к окружности, причем $|AB| = |CD|$. Как найти длину линии $ABCD$? Вычислите ее при $d = 4$ и диаметре, равном 1.

20. Как найти длину жирной линии на рисунке 107? Вычислите ее при $R = 1$.

21. а) Около треугольника описана окружность. Как узнать, в каком отношении разделилась длина этой окружности вершинами треугольника? Проверьте результат на конкретном примере. б) Составьте аналогичную задачу о вписанном треугольнике.

22. Около окружности радиуса 1 описан правильный n-угольник. а) Чему равна длина дуги между двумя соседними точками касания? б) Отметьте две любые точки касания. Как найти длину дуги между ними? в) Может ли длина дуги между какими-то точками касания равняться π? равняться 1?

23. Составьте и решите задачу, аналогичную задаче 22, для описанной окружности.

24. Круглая площадка разбита дорожками на секторы. Вы находитесь на пересечении границы площадки и дорожки. А ваш

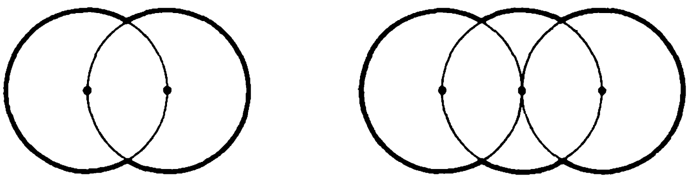


Рис. 107

товарищ в другой такой же точке. Как вам покороче добраться до него? (Ходить можно только по дорожкам и по границе площадки.)

25. Шоссейная дорога изменила направление. Изменение направления дороги происходит по окружности. Предположим, вы проектируете дорогу. Что нужно знать, чтобы вычислить длину дороги на переходном участке?

26. Точка равномерно движется по окружности. Будет ли равномерным движение ее проекции на диаметр окружности? Сформулируйте и проверьте обратное.

27. Часы показывали 15.00. Как вычислить путь, который пройдет конец минутной стрелки, пока она не догонит часовую?

28. Нарисуйте отрезок AB. Вы хотите покороче попасть из A в B, двигаясь только по полуокружностям, диаметры которых лежат на AB. Какой вы выберете путь?

29. Автомобиль едет по дуге окружности. Какое из его колес проходит больший путь? меньший путь?

§ 36. ПЛОЩАДЬ КРУГА

36.1. Площадь фигуры

До сих пор мы рассматривали площади многоугольных фигур. Площадь многоугольной фигуры равна сумме площадей составляющих ее треугольников. Площадь произвольной фигуры измеряют так. Пусть, например, фигуру F можно нарисовать на миллиметровой или другой клетчатой бумаге. Тогда заключенные в ней клетки образуют содержащуюся в F некоторую многоугольную фигуру H (рис. 108). Считая число клеток, найдем площадь $S(H)$. Клетки, покрывающие фигуру F, образуют содержащую ее фигуру G. Считая в ней число клеток, найдем $S(G)$. Площадь фигуры F будет заключена между $S(H)$ и $S(G)$. Величина $S(G)$ дает значение площади $S(F)$ с избытком, а $S(H)$ — с недостатком. Чем меньше клетки, тем точнее оценивается площадь фигуры.

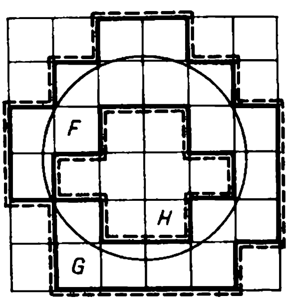


Рис 108

Фигуры, состоящие из клеток, т. е. из квадратов, обычно заметно отступают от данной фигуры. Поэтому удобно «срезать», скажем, выступающие квадраты, получая треугольники и тем самым многоугольную фигуру, ближе подходящую к данной фигуре (рис. 109).

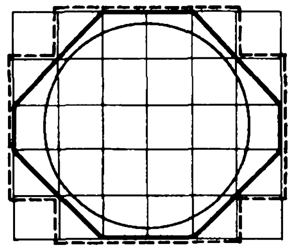


Рис 109

Если нет клетчатой бумаги, то можно, например, обвести данную фигуру F ломаной, которая ограничит многоугольник G, содержащий F. Так же можно построить многоугольник H, содержащийся в F. Разбивая многоугольники на треугольники, найдем их площади, а сложив их, получим приближенное значение площади данной фигуры.

В общем случае для произвольной фигуры F ее площадь $S(F)$ можно определить с помощью площадей многоугольных фигур так.

Если фигура F содержится в многоугольной фигуре G (рис. 110, *а*), то ее площадь не больше площади фигуры G, т. е.

$$S(F) \leqslant S(G).$$

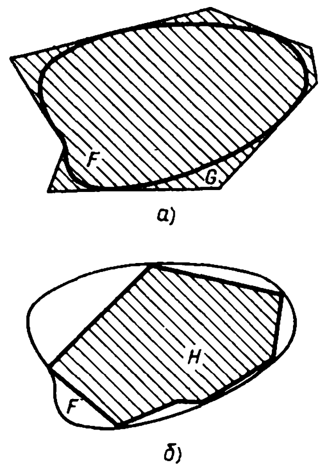


Рис. 110

Если же некоторая многоугольная фигура H содержится в F (рис. 110, *б*), то площадь фигуры F не меньше площади фигуры H, т. е.

$$S(H) \leqslant S(F).$$

Итак, площадь $S(F)$ фигуры F — это такое число (при данной единице измерения), что для всяких многоугольных фигур H и G, содержащихся в F и содержащих F,

$$S(H) \leqslant S(F) \leqslant S(G).$$

(Если многоугольной фигуры, содержащейся в F, нет, то вместо $S(H)$ берется нуль: $0 \leqslant S(F) \leqslant S(G)$.)

Таким образом, мы окончательно приходим к следующему определению.

При указанной единице измерения площадь данной фигуры F — это число, заключенное между площадями многоугольных фигур, содержащихся в F и содержащих F.

36.2. Площадь круга

Если данная фигура F — круг, то, измеряя его площадь, проще всего брать описанные и вписанные правильные многоугольники Описанные многоугольники содержат круг F, а вписанные содержатся в круге. Площадь круга $S(F)$ заключена между площадями вписанных и описанных правильных многоугольников. Выражение ее через радиус дает следующая теорема.

Теорема *(о площади круга).* ***Площадь круга радиуса R выражается формулой***

$$S(F) = \pi R^2,$$

где π — отношение длины окружности к ее диаметру.

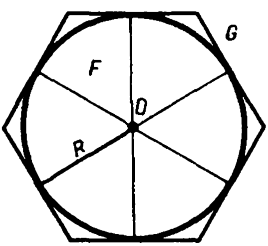


Рис 111

Доказательство. Пусть F — круг радиуса R с центром в точке O, а G — правильный n-угольник, описанный вокруг F (рис. 111). Как доказано в п. 33.6, площадь $S(G)$ многоугольника G выражается через его периметр P_0 и радиус R формулой

$$S(G) = \frac{1}{2} P_0 R. \quad (1)$$

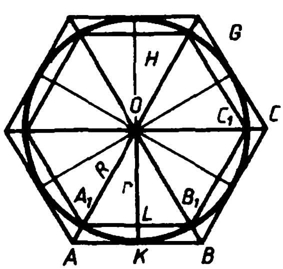


Рис. 112

Соединив отрезками точку O с вершинами A, B, C, ... многоугольника G, разобьем его на равные равнобедренные треугольники (рис. 112). Точки пересечения отрезков OA, OB, OC, ... с окружностью круга F будут вершинами A_1, B_1, C_1, ... правильного n-угольника H, вписанного в круг F.

Проведем радиус OK в точку касания K стороны AB с кругом F. Пусть L — точка пересечения OK и A_1B_1. Отрезок OL —

радиус окружности, вписанной в H. Положим $OL = r$, и пусть P — периметр многоугольника H. Тогда площадь $S(H)$ выражается через P и r формулой, аналогичной равенству (1):

$$S(H) = \frac{1}{2} Pr. \qquad (2)$$

Так как треугольники OAB и OA_1B_1 подобны, то их высоты $OK = R$ и $OL = r$ относятся как их стороны AB и A_1B_1:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{R}{r}. \qquad (3)$$

А так как $P_0 = nAB$ и $P = nA_1B_1$, то

$$\frac{P_0}{P} = \frac{R}{r}. \qquad (4)$$

Выразив P_0 из (4) и подставив его выражение в (1), получим, что

$$S(G) = \frac{1}{2} PR \cdot \frac{R}{r}. \qquad (5)$$

Поскольку

$$S(H) < S(F) < S(G), \qquad (6)$$

то из (6), (5) и (2) получаем неравенство

$$\frac{1}{2} PR \cdot \frac{r}{R} < S(F) < \frac{1}{2} PR \cdot \frac{R}{r}. \qquad (7)$$

Когда число сторон многоугольника H неограниченно возрастает, его периметр P стремится к длине окружности круга F, т. е. к $2\pi R$. Радиус r стремится к R, а отношения $\frac{r}{R}$ и $\frac{R}{r}$ стремятся к единице. Поэтому выражения слева и справа в неравенствах (7) стремятся к одному и тому же значению — к πR^2.

Итак, мы доказали, что площади $S(H)$ и $S(G)$ и вписанных, и описанных около данного круга многоугольников стремятся к одному и тому же числу — к πR^2. Поэтому разность $S(G) - S(H)$ становится сколь угодно малой. Площадь круга $S(F)$ заключена между числами $S(G)$ и $S(H)$. Значит разность $S(F) - \pi R^2$ тоже должна быть сколь угодно малой. А так как эта разность — постоянное число, то $S(F) - \pi R^2 = 0$. Итак, $S(F) = \pi R^2$. Теорема доказана.

36.3. Квадратура круга

Квадратура круга — это задача о построении циркулем и линейкой квадрата, равновеликого данному кругу, т. е. имеющего ту же площадь. Невозможность решения этой задачи циркулем и линейкой была доказана лишь в конце XIX века немецким математиком Карлом Линдеманом (1852—1939).

Выражение «квадратура круга» означает неразрешимую задачу и употребляется в литературе с древнейших времен и до наших дней, например в комедии древнегреческого драматурга Аристофана «Птицы» (V в. до н. э.) и в пьесе В. Катаева «Квадратура круга».

36.4*. Площади сектора и сегмента

Поскольку площадь сектора с углом в 1° составляет $\frac{1}{360}$ часть площади круга и равна $\frac{\pi R^2}{360}$, то площадь сектора с углом в α градусов равна:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi\alpha}{360} R^2.$$

Чтобы найти площадь сегмента с углом в α градусов (рис. 113), надо из площади сектора вычесть площадь треугольника с основанием $2R\sin\frac{\alpha}{2}$ и высотой $R\cos\frac{\alpha}{2}$. Поэтому

$$S_{\text{сегм}} = \frac{\pi\alpha}{360} R^2 - R^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

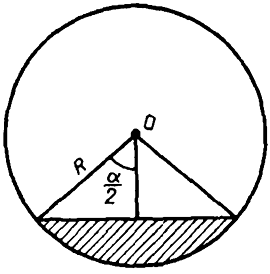


Рис 113

Задачи к § 36

Задачи к п. 36.2

1. Запишите формулу площади круга. а) Выразите из этой формулы радиус круга. Пропорциональность каких величин указана в этой формуле? б) Пусть радиус круга увеличился в два раза. Как изме-

шилась его площадь? в) Пусть площадь круга уменьшилась в два раза. Как изменился его радиус?

2. а) Запишите зависимость между площадью круга и длиной окружности. Какие величины, записанные в этой формуле, пропорциональны? б) Как изменится площадь круга, если длина окружности увеличится в два раза? уменьшится в три раза? в) Как изменится длина окружности, если площадь круга увеличится вдвое? уменьшится втрое?

3. а) Докажите, что площади двух кругов относятся как квадраты их радиусов; длин их окружностей. б) Выведите обратные соотношения.

4. а) Как можно вычислить площадь кольца? Приведите пример. Выберите такие данные, чтобы кольцо имело площадь, равную π; 1; данному числу a. б) Какие измерения необходимо провести на реальном кольце, чтобы вычислить его площадь?

5. а) Внутри данного круга проходит окружность, которая делит его площадь пополам. Каков радиус этой окружности? б) Две окружности касаются изнутри, причем центр большей окружности лежит на меньшей. В каком отношении разделилась площадь большего круга меньшей окружностью?

6. Вычислите площадь круга, описанного вокруг: а) равностороннего треугольника со стороной 1; б) равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 1; в) прямоугольного треугольника с катетом d и прилежащим острым углом φ; г) равнобедренного треугольника с боковой стороной 1 и углом при вершине 120°; д) равнобедренного треугольника с высотой d_1 и основанием d_2; е) квадрата со стороной d; ж) прямоугольника со сторонами 1 и 2; з) равнобедренной трапеции с основаниями 5 и 2 и боковой стороной 1.

7. Вычислите площадь круга, вписанного в фигуры, указанные в задаче 6 а) — е).

8. а) Около правильного треугольника со стороной 1 описана окружность и в него вписана окружность. Вычислите площадь образовавшегося кольца. б) Обобщите задачу а) для правильного n-угольника. в) Пусть дано кольцо шириной 1. Может ли уместиться в нем граница равностороннего треугольника, квадрата, правильного n-угольника?

9. Дана окружность радиуса 1. а) В нее вписан правильный треугольник и около нее описан правильный треугольник. Чему равна разность площадей этих треугольников? б) Какой правиль-

ный n-угольник надо вписать в эту окружность и какой правильный n-угольник надо описать около нее, чтобы разность их площадей была меньше 0,1; 0,01? Пусть разность этих двух площадей оказалась меньше 0,1; меньше 0,01. В каких границах находится в этих случаях площадь круга? в) Для каких правильных вписанных n-угольников площадь круга отличается от их площади меньше чем на 0,001? г) Для каких правильных описанных n-угольников площадь круга отличается от их площади меньше чем на 0,001?

10. Квадрат и круг имеют одинаковую длину границы. Сравните их площади. Обобщите этот результат.

11. Квадрат и круг имеют одинаковую площадь. Сравните длину их границ. Обобщите результат.

12. Почему для передачи газа на большие расстояния выгоднее использовать трубы большого диаметра?

Задачи к п. 36.4

13. Запишите формулу для вычисления площади сектора, если известен радиус круга и соответствующий центральный угол. а) Как изменяется его площадь при изменении только радиуса? только угла? Назовите пропорциональные величины. б) Выразите из этой формулы радиус. Приведите пример вычисления радиуса по заданной площади и центральному углу. в) Как из этой формулы можно вычислить центральный угол? Приведите пример.

14. Из круга радиусом 1 вырезан сектор. Какова его площадь, если центральный угол этого сектора равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 120°; е) 135°; ж) 150°?

15. Как вычислить площадь сектора, если известны: а) радиус круга и длина его дуги; б) длина его дуги и центральный угол; в) длина его границы и центральный угол? Приведите числовые примеры.

16. Какие вы выберете размеры сектора, чтобы его площадь равнялась: а) π; б) 1; в) данному числу a; г) π, а длина его дуги равнялась π; д) длине его дуги; е) длине его границы?

17. В круге радиусом 1 проведена хорда. В каком отношении она делит площадь круга, если она видна из центра под углом: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 120°; е) 135°; ж) 150°?

18. В круге радиусом R проведена хорда. Она видна из центра под углом φ. а) Как, зная R и φ, найти площадь наименьшего из образованных сегментов? Как изменяется эта площадь при изменении только радиуса? только угла? б) Выразите радиус круга через площадь меньшего сегмента и угол φ. в) Сможете ли вы, зная радиус круга и площадь меньшего сегмента, найти угол φ?

19. Как вычислить площадь сегмента, если известны: а) длина его хорды и длина его дуги; б) длина его хорды и длина его стрелки[1]; в) длина его дуги и длина его стрелки; г) периметр и угол, под которым его хорда видна из центра; д) длина его хорды и угол, составленный ею с касательной к окружности, проведенной в одном из концов хорды?

20. Решите для сегмента задачи, аналогичные задаче 16.

21. В данном круге рассматриваются сегменты, меньшие полукруга. Объясните, почему бóльшая площадь такого сегмента соответствует: а) большей хорде сегмента; б) большей стрелке сегмента; в) большему углу, под которым хорда этого сегмента видна из центра.

22. а) На сторонах прямоугольного треугольника построили полукруги. Докажите, что площадь большего из них равна сумме площадей меньших. б) Нарисуйте два круга. Постройте третий круг, площадь которого равна сумме площадей данных кругов.

23. Сектор состоит из треугольника и сегмента. а) Могут ли эти треугольник и сегмент иметь равные площáди? б) При каком центральном угле больше площадь треугольника; площадь сегмента?

24. Как разделить на две равновеликие части данный: а) сектор; б) сегмент?

25. Что вы будете измерять и как проведете вычисления, чтобы узнать площадь реального: а) сектора; б) сегмента?

26. По горизонтальной трубе течет вода. Как узнать расход воды за 1 ч, если известно, что она не заполняет всю трубу полностью?

ВЫВОДЫ

Эта глава была посвящена изучению взаимного расположения окружностей и многоугольников, а также измерению длины окружности и площади круга.

Были выделены два особых случая взаимного расположения окружности и многоугольника. Первый из них, когда многоуголь-

---

[1] Стрелка сегмента — это часть радиуса круга, перпендикулярного его хорде, лежащая в сегменте.

ник вписан в окружность, т. е. когда все его вершины лежат на окружности (п. 33.3). Второй — когда многоугольник описан вокруг окружности, т. е. когда все его стороны касаются окружности (п. 33.6).

Не всегда многоугольник можно вписать в окружность и не всегда вокруг многоугольника можно описать окружность. Но вокруг каждого треугольника можно описать окружность. Центр ее равноудален от всех вершин треугольника и лежит на пересечении серединных перпендикуляров сторон треугольника (п. 33.4). И в каждый треугольник можно вписать окружность. Центр ее равноудален от всех сторон треугольника и лежит на пересечении биссектрис углов треугольника (п. 33.7).

Кроме треугольников, есть еще многоугольники, вокруг которых можно описать окружность и в которые можно вписать окружность. Среди них правильные многоугольники, примечательные и другими своими свойствами.

Многоугольник называется правильным, если у него все стороны равны и все углы равны. В правильном многоугольнике есть точка, равноудаленная от всех вершин и равноудаленная от всех его сторон,— центр правильного многоугольника. Эта точка одновременно является центром окружности, описанной вокруг правильного многоугольника, и окружности, вписанной в него (п 34.2).

Длина кривой линии, в том числе и длина окружности, определяется как предел длин вписанных в нее ломаных, когда звенья ломаной безгранично уменьшаются (п. 35.1).

Длина окружности пропорциональна ее радиусу, а также диаметру. Отношение длины окружности к ее диаметру обозначается греческой буквой π (п. 36 2). Длина L окружности радиуса R выражается формулой

$$L = 2\pi R.$$

Площадь фигуры F на плоскости (в том числе и круга) — это число, заключенное между площадями многоугольных фигур, содержащих F и содержащихся в F (п. 36.1).

Площадь круга радиуса R выражается формулой

$$S = \pi R^2.$$

ГЛАВА VIII.

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ПОДОБИЯ

§ 37. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И РАВЕНСТВО ФИГУР

37.1. Преобразования фигур

В VI классе в начале курса геометрии мы говорили, что самая первая задача геометрии состоит в том, чтобы дать точно обоснованные правила для построения фигур с заданными свойствами. Мы решали эту задачу в основном для треугольников. Для более сложных фигур мы еще не определили, что означает их равенство (хотя, конечно, интуитивно каждый понимает, что это значит). В то же время реальные построения обычно предполагают или построения равных (одинаковых) фигур, или фигур, обладающих какими-нибудь свойствами симметрии или подобия. Например, фасады некоторых домов симметричны (рис 114) и окна на этих фасадах расположены в «правильном порядке» (а что это значит?). Как начертить план такого фасада или как, начертив одно из окон, получить из его изображения изображения остальных окон, начертив одну из дверей, получить из ее изображения изображения остальных дверей, и т. д.?

Решение таких задач связано с преобразованием одних фигур в другие фигуры. Например, начертив одну половину симметричного фасада, другую его половину получают из нее, «отразив» ее относительно оси симметрии (рис. 115). А иногда надо перечер-

Рис 114

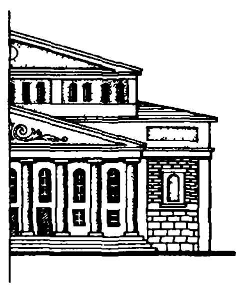


Рис 115

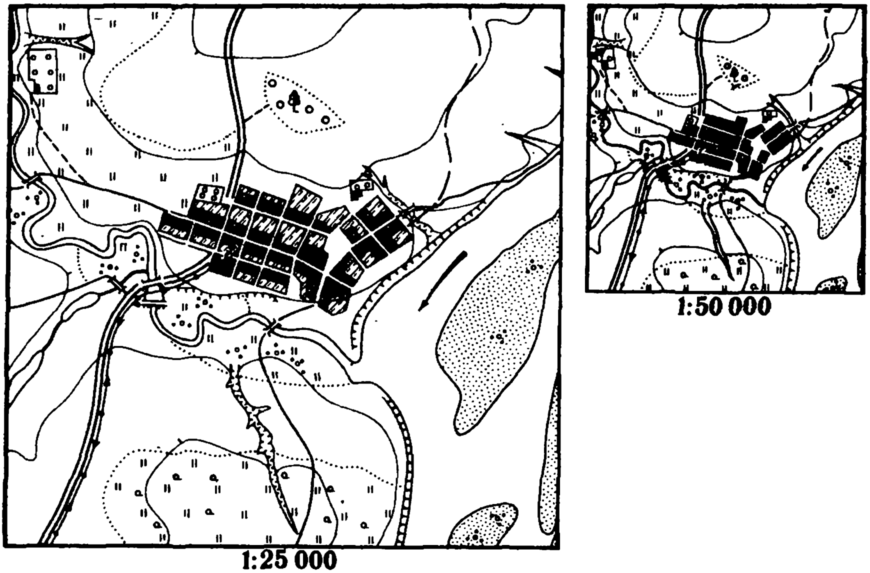


Рис. 116

тить план или карту в другом масштабе (рис. 116). Еще примеры преобразований плоских фигур: увеличение фотографий, проектирование изображения с кинопленки на экран или просто тени от предметов (рис. 117).

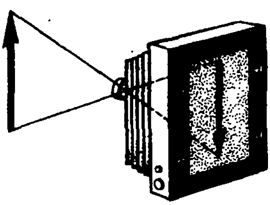


Рис. 117

Во всех приведенных примерах преобразования фигур существенно следующее. Задана некоторая фигура F и каждой точке этой фигуры F сопоставлена (ставится в соответствие) некоторая точка. Множество точек, сопоставленных точкам данной фигуры F, является некоторой фигурой F' (рис. 118). Говорят, что фигура F' получена **преобразованием фигуры** F, а также что фигура F' является **образом фигуры** F для данного преобразования.

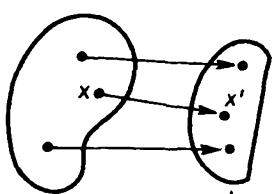


Рис. 118

Вместо слов «преобразование фигуры» можно сказать «отображение фигуры».

37.2. Перемещения фигур

Самыми важными являются такие преобразования фигур, при которых сохраняются все их геометрические свойства — расстояния между точками, углы, площади, параллельность отрезков и т. д. Оказывается, достаточно потребовать, чтобы при преобразовании фигуры сохранились лишь расстояния между точками, а тогда у полученной фигуры сохранятся и все остальные геометрические свойства — углы, площади и т. д.

Преобразования фигур, которые сохраняют расстояния между точками, называются перемещениями (или движениями).

Говорят, что *фигура F' получена перемещением фигуры F* (рис. 119), *если любым точкам X, Y фигуры F сопоставляются такие точки X', Y' фигуры F', что*

$$|X'Y'| = |XY|. \qquad (1)$$

Со словом «перемещение» связывается представление о перемещении реальных тел, когда тело меняет местоположение без деформаций — без изменений расстояний в нем. Так понимают перемещения в физике и в повседневной жизни. Перемещение в геометрии — это отвлеченный образ реальных перемещений. Геометрическую фигуру нельзя переместить в буквальном смысле, как нельзя переместить участок земли, рисунок на бумаге и т. п. Можно переместить бумагу, но не рисунок, не фигуру. Перемещение фигуры — это только сопоставление ее точкам других точек.

Когда сравнивают предметы, участки земли и т. п., сопоставляют точки в одном предмете точкам в другом и сравнивают расстояния (рис. 120). Фигуры на бумаге можно сравнивать, скопировав одну из них на кальку, а потом накладывать копию на другую фигуру (рис. 121). Перемещается не фигура, а калька с копией. Для самих же фигур точки одной сопоставляются точкам другой — тем, куда ложатся точки копии.

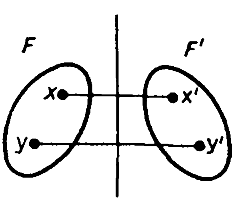


Рис. 119

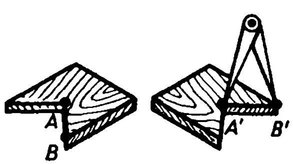


Рис. 120

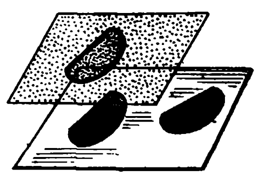


Рис. 121

Тем не менее нередко говорят, что точка «переместилась» или «наложим один треугольник на другой» и т. п., и при этом представляют себе, что один треугольник накладывается на другой как бы на самом деле. Во всем этом не будет беды, если понимать, что в геометрии «накладывают» одну фигуру на другую только в смысле сопоставления их точек.

37.3. Свойства фигур, сохраняющиеся при перемещении

Перемещение сохраняет расстояния, а потому сохраняет все, что ими определяется. Укажем основные из таких свойств.

Свойство 1. ***Три точки, лежащие на одной прямой, при перемещении переходят в три точки, лежащие на одной прямой, а три точки, не лежащие на одной прямой,— в три точки, не лежащие на одной прямой.***

Доказательство. 1) Пусть три точки A, B, C лежат на одной прямой. Тогда одна из них лежит между двумя другими. Пусть, например, B лежит между A и C. Это имеет место тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$|AB| + |BC| = |AC|. \tag{2}$$

Пусть некоторое перемещение сопоставляет точкам A, B, C точки A', B', C'. Поскольку $|A'B'| = |AB|$, $|B'C'| = |BC|$ и $|A'C'| = |AC|$, то из этих равенств и равенства (2) следует

$$|A'B'| + |B'C'| = |A'C'|. \tag{3}$$

Равенство (3) означает, что точка B' лежит между точками A' и C', т. е. точки A', B', C' лежат на одной прямой.

2) Пусть теперь точки A, B, C не лежат на одной прямой. Докажем, что тогда и точки A', B', C' не лежат на одной прямой. Допустим противное. Тогда одна из точек A', B', C' лежит между двумя другими,— например B' лежит между A' и C', т. е.

$$|A'B'| + |B'C'| = |A'C'| \text{ и } |AB| + |BC| = |AC|,$$

значит B лежит между A и C. Но это противоречит условию. Итак, точки A', B', C' не лежат на одной прямой. ■

Свойство 2. ***Отрезок перемещением переводится в отрезок.***

Доказательство. Пусть концам отрезка AB перемещение f сопоставляет точки A' и B'. Возьмем любую точку X отрезка AB. Тогда, как и при доказательстве свойства 1, можно установить, что точке X перемещение f сопоставляет точку X', лежащую между A' и B', т. е. лежащую на отрезке $A'B'$. Далее, каждой точке Y' отрезка $A'B'$ сопоставляется некоторая точка Y отрезка AB. А именно той точке Y, которая удалена от точки A на расстояние $|A'Y'|$ (объясните почему). Следовательно, отрезок AB перемещением f переводится в отрезок $A'B'$. ■

Свойство 3. ***Треугольник перемещением переводится в треугольник.***

Доказательство. Треугольник ABC заполняется отрезками, соединяющими вершину A с точками X противоположной стороны BC. Перемещение f сопоставит отрезку BC некоторый отрезок $B'C'$ и точке A точку A', не лежащую на прямой $B'C'$. Каждому отрезку AX это перемещение сопоставит отрезок $A'X'$, где X' — точка отрезка $B'C'$. Все эти отрезки $A'X'$ заполнят треугольник $A'B'C'$ (рис. 122), в который перемещение f переводит треугольник ABC. ■

Свойство 4. ***Перемещение сохраняет величины углов.*** Подробнее: если точкам A, B, C перемещение f сопоставляет точки A', B', C', то угол между отрезками $A'B'$ и $A'C'$ равен углу между отрезками AB и AC.

Доказательство. Если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то получаем треугольники ABC и $A'B'C'$ с равными сторонами (рис. 123, *а*). Поэтому в этих треугольниках соответственные углы равны, в частности $\widehat{A'} = \widehat{A}$.

Пусть точки A, B, C лежат на одной прямой. Если A лежит на отрезке BC, то A' лежит на отрезке $B'C'$ и $\widehat{A'} = \widehat{A} = 180°$ (рис. 123, *б*). Если A не лежит на отрезке BC, то A' не лежит на отрезке $B'C'$ и $\widehat{A'} = \widehat{A} = 0°$ (рис. 123, *в*). ■

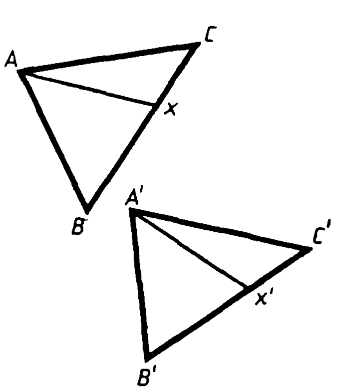


Рис. 122

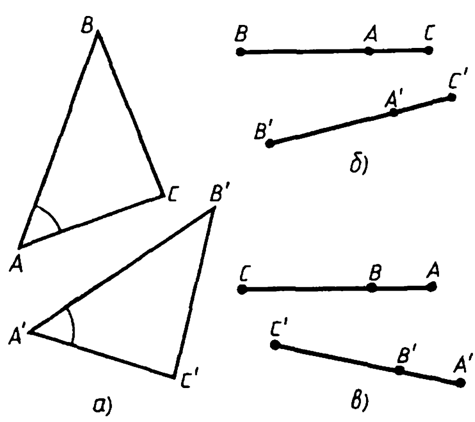


Рис. 123

Итак, перемещение сохраняет углы, в частности перпендикулярность. Поэтому высота треугольника перемещением переводится в высоту треугольника. Длина высоты, как и длина основания треугольника, сохраняется. Значит, *перемещение сохраняет площадь треугольника.*

Многоугольные фигуры составляются из треугольников. Поэтому справедливо такое свойство.

Свойство 5 ***У многоугольных фигур при перемещениях сохраняются углы и площади.***

Значит, при перемещениях все свойства фигур сохраняются. Две фигуры, полученные одна из другой перемещением, совершенно одинаковы.

37.4. Равенство фигур

Мы знаем, что две фигуры, полученные одна из другой перемещением, совершенно одинаковы. Но в геометрии о фигурах вместо «одинаковы» говорят «равны» и дается такое определение.

Фигура F′ называется равной фигуре F, если существует перемещение, переводящее F в F′, т. е. F′ можно получить перемещением F.

Если F' получается перемещением f фигуры F, то и F тоже можно получить перемещением фигуры F'. Это обратное для f перемещение определится так: если исходное перемещение f точке X фигуры F сопоставляло точку $X' \in F'$, то обратное перемещение точке $X' \in F'$ сопоставляет исходную точку $X \in F$ (рис. 124). Так как при перемещении фигуры F в фигуру F' расстояния между точками не менялись, то они не изменятся и при обратном перемещении F' в F. Поэтому можно равенство фигур определить так, что в этом определении обе фигуры будут играть одинаковую роль: *две фигуры называются равными, если между их точками есть соответствие, сохраняющее расстояния* (это и означает, что каждая из них может быть получена перемещением из другой).

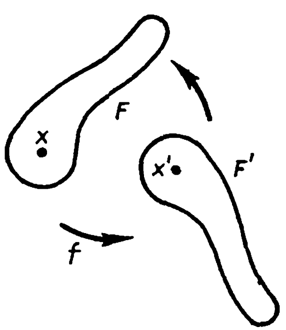


Рис. 124

Равенство фигур записывают так: $F' \cong F$. (Вместо слова «равны» говорят еще «конгруэнтны».)

Данное определение равенства фигур

выражает то, как на практике сравнивают предметы. Только на практике чаще говорят не о расстояниях, а о том, как сравнивают соответствующие размеры, и о предметах говорят, что они одинаковые (или разные, если размеры оказались разными). Но размеры — это и есть расстояния между точками предмета, как, скажем, расстояния между углами оконной рамы и т. п.

Конечно, на практике никто не сравнивает предметы так, чтобы каждой точке одного предмета сопоставлять точку другого. Сравнивают расстояния между некоторыми точками; сравнивают те расстояния, которые играют определяющую роль, как, например, длины сторон и диагоналей четырехугольного предмета или диаметр круглого предмета.

Так мы и поступили, когда определили, какие треугольники называются равными Для них определяющими размерами служат расстояния между вершинами — длины сторон. Соответственно по принятому нами определению треугольники равны, если равны их стороны. Аналогично можно было бы определить и равенство многоугольников. Для них определяющими размерами будут длины сторон и диагоналей. Поэтому можно было бы дать такое определение: многоугольники равны, если равны их соответственные стороны и диагонали.

Когда мы обращаемся к произвольным фигурам, то неизвестно, расстояния между какими точками можно считать определяющими. Поэтому в общем определении равенства фигур говорится о любых точках.

Задачи к § 37

Основная задача

1. Пусть f — перемещение, A и B — две фигуры. Докажите, что: а) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$; б) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. (Знак $\cap$ обозначает пересечение фигур, а знак $\cup$ — объединение фигур.)

* * *

2. Дан отрезок AB. На отрезке AB берется точка X. На луче с началом A_1 берется точка X_1, такая, что $A_1X_1 = AX$. Будет ли такое преобразование отрезка AB перемещением?

3. Дан отрезок. От всех его точек откладываются с одной стороны от него равные и параллельные между собой отрезки. Докажите, что получилось перемещение данного отрезка.

4. Из всех точек отрезка AB проводятся перпендикуляры на прямую a. Будет ли такое преобразование этого отрезка перемещением?

5. Отрезок AB перпендикулярен прямой a, точка $A \in a$. Из всех точек отрезка AB проводятся в одну сторону от него параллельные отрезки до пересечения с прямой a. Будет ли такое преобразование перемещением отрезка?

6. Каждой точке X на стороне угла сопоставим точку X_1 на другой стороне так, что все отрезки XX_1 параллельны Будет ли такое преобразование перемещением?

7. Дан круг с центром O. Каждой точке X этого круга сопоставим точку X_1 так, что $OX_1 = OX$. Будет ли это преобразование перемещением круга?

§ 38. ВИДЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Пусть на плоскости даны какие-то равные фигуры F и F' (рис. 125). То, что фигуры F и F' равны, означает, что каждую из них некоторым перемещением можно перевести в другую фигуру Оказывается, что на плоскости существуют всего лишь четыре вида перемещений, т е. F можно перевести в F' перемещением лишь одного из этих видов

Имеются следующие возможности:

1 Параллельный перенос (короче: перенос или сдвиг, рис 126, *а*).

2. Отражение в прямой (осевая симметрия, рис. 126, *б*).

3. Поворот вокруг точки (рис. 126, *в*)

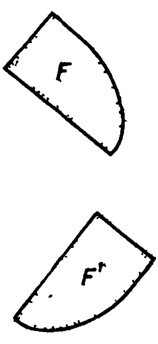


Рис 125

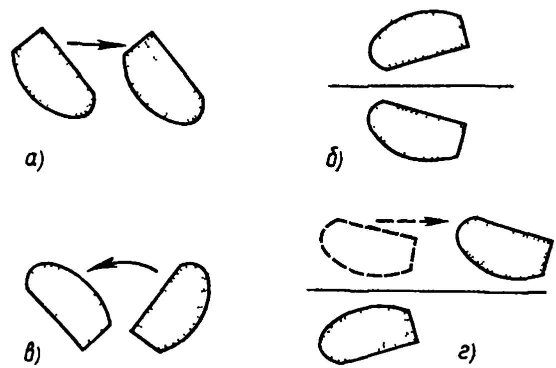


Рис 126

4 «Скользящее отражение», состоящее из последовательно выполненных отражения в прямой и сдвига вдоль нее (рис. 126, *г*).

Мы рассмотрим перенос, отражение в прямой и поворот.

38.1. Перенос

О п р е д е л е н и е **Параллельным переносом фигуры называется такое ее преобразование, при котором все точки фигуры перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.**

Следовательно, если при параллельном переносе точкам X и Y сопоставлены точки X' и Y', то направленные отрезки $\overrightarrow{XX'}$ и $\overrightarrow{YY'}$ равны и одинаково направлены, так что (рис. 127)

$$\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{YY'}.$$

Равные направленные отрезки представляют один и тот же вектор Поэтому можно сказать так. Параллельный перенос — это преобразование, при котором все точки фигуры перемещаются на один и тот же вектор — **вектор переноса.**

З а м е ч а н и е Параллельный перенос в геометрии — это отвлеченный образ такого реального перемещения тел, когда все точки тела перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Такое непрерывно происходящее перемещение — это чисто поступательное движение (в отличие от движения, при котором происходит также поворот тела)

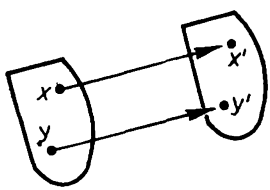


Рис 127

Параллельный перенос является перемещением, которое сохраняет направление. Действительно, пусть при параллельном переносе точки X и Y перешли в точки X' и Y'. Тогда, как следует из определения переноса, выполняется равенство векторов (рис. 128):

$$\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{YY'} \qquad (1)$$

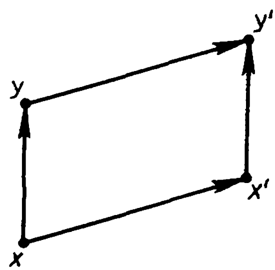


Рис 128

Согласно признаку равенства векторов (п. 26.4) равенство (1) равносильно следующему равенству:

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X'Y'} \qquad (2)$$

Равенство (2) означает, во-первых, что $|XY| = |X'Y'|$, и во-вторых, что векторы $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{X'Y'}$ сонаправлены. Из равенства $|XY| = |X'Y'|$ следует, что параллельный перенос — это перемещение. А сонаправленность векторов $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{X'Y'}$ показывает, что перенос сохраняет направления.

38.2. Отражение в прямой (осевая симметрия)

Напомним сначала, что значит **точки симметричны относительно прямой.** Пусть дана некоторая прямая a. Возьмем любую точку X. Пусть точка X не лежит на прямой a. Тогда точка X' называется симметричной точке X относительно прямой a, если прямая a перпендикулярна отрезку XX' и пересекает его в середине (рис. 129, *а*). Если же точка X лежит на прямой a, то считается, что она сама себе симметрична относительно прямой a.

Симметричность точек относительно прямой взаимна: если точка X' симметрична X относительно a, то X симметрична точке X' относительно a.

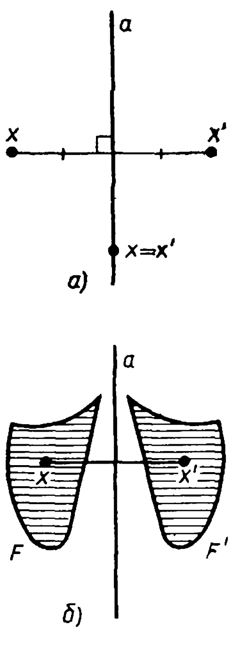


Рис 129

Пусть заданы фигура F и некоторая прямая a. Тогда построение фигуры F', симметричной фигуре F относительно прямой a, осуществляется так. Если для каждой точки X *фигуры F построить точку X'*, симметричную точке X относительно прямой a, то все эти точки образуют фигуру F' (рис. 129, *б*). Фигура F' называется **симметричной фигуре F относительно прямой** a. Построенное нами преобразование, переводящее F в F', называется **симметрией фигуры F относительно прямой** a или, иначе, **отражением фигуры F в прямой** a.

Поскольку симметричность точек относительно прямой взаимна, то и фигура F симметрична фигуре F' относительно a, т. е. *обе фигуры F и F' взаимно симметричны относительно a.*

В частности, фигура F может быть симметрична сама себе относительно некоторой прямой a (рис. 130). Тогда говорят, что фигура F **симметрична относительно прямой** a и что прямая a является ее **осью симметрии.**

Отражение в прямой является перемещением, т. е. сохраняет расстояния.

Чтобы доказать это, применим метод координат. Примем прямую a за ось x прямоугольных координат. Тогда отражение в ней сопоставит точке (x, y) точку $(x, -y)$ (рис. 131), т. е. отражение относительно оси x вызывает перемену знака координаты y.

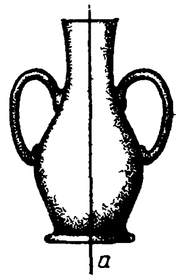


Рис 130

Расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ выражается через квадраты разностей их координат:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

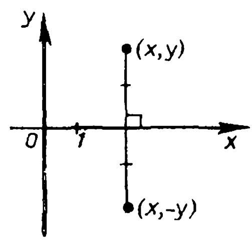


Рис 131

Но координата x сохраняется, а y только меняет знак при отражении в оси x. Поэтому имеем точки $A'(x_1, -y_1)$ и $B'(x_2, -y_2)$. Следовательно,

$$|A'B'| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |AB|,$$

что и требовалось доказать.

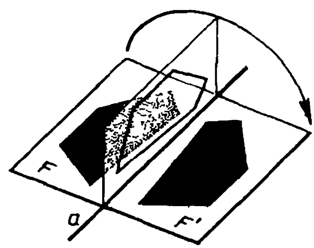


Рис 132

Отражение в прямой можно наглядно представить как поворот вокруг этой прямой в пространстве. Именно: представим себе часть плоскости с данной фигурой F в виде пластинки, надетой на прямую a как на ось. Повернем пластинку вокруг оси на 180° так, что она окажется в прежней плоскости (рис. 132). Точки, лежавшие с одной стороны от прямой a, перейдут на другую сторону на том же расстоянии от a. Значит, произойдет отражение в прямой a.

Для того чтобы получить рисунок фигуры, отраженной в прямой, можно перевернуть лист бумаги. Если бумага достаточно прозрачна, то рисунок и будет виден как отраженный.

38.3. Центральная симметрия

Фиксируем некоторую точку O, и пусть точка X не совпадает с O. Напомним, что точка X' называется **симметричной точке X относительно точки O**, если точка O является серединой отрезка XX' (рис. 133). Симметричной для точки O является она сама.

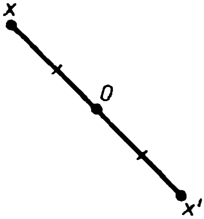


Рис. 133

Симметричность точек относительно центра O взаимна: если X' симметрична X относительно O, то и X симметрична X' относительно O.

Пусть заданы фигура F и некоторая точка O. Тогда построение фигуры F', симметричной фигуре F относительно O, осуществляется так. Если для каждой точки X фигуры F построить точку X', симметричную точке X относительно O, то все эти точки образуют фигуру F' (рис. 134). **Фигура F' называется симметричной фигуре F относительно точки** O. Построенное нами преобразование, переводящее F в F', называется **симметрией фигуры F относительно точки** O.

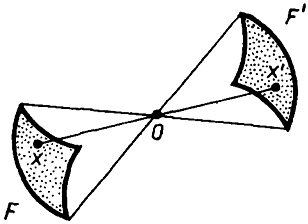


Рис. 134

Поскольку симметричность точек относительно прямой взаимна, то и фигура F будет симметрична фигуре F' относительно точки O, т. е. *обе фигуры F и F' взаимно симметричны относительно точки O.* В частности, фигура F может быть симметрична сама себе относительно точки O (рис. 135). Тогда говорят, что фигура F **симметрична относительно точки** O и что точка O является **центром симметрии фигуры** F. Например, центр круга — это его центр симметрии (рис. 136), точка пересечения диагоналей параллелограмма — его центр симметрии (рис. 137).

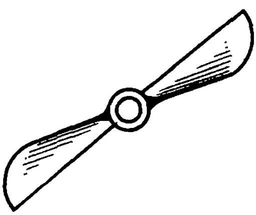


Рис. 135

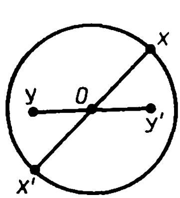


Рис. 136

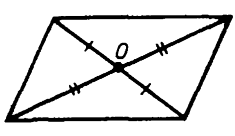


Рис. 137

Центральная симметрия является перемещением, которое меняет направления на противоположные. Действительно, рассмотрим симметрию с центром O. Пусть эта симметрия точкам X и Y сопоставит точки X' и Y' (рис. 138). Тогда $\overrightarrow{OX'} = -\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OY'} = -\overrightarrow{OY}$. Поэтому $\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{YX} = -\overrightarrow{XY}$.

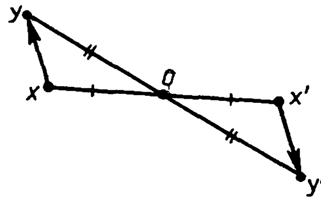


Рис. 138

Итак, любой вектор $\overrightarrow{XY}$ центральная симметрия переводит в противоположный: $\overrightarrow{X'Y'} = -\overrightarrow{XY}$. Так как при этом $|X'Y'| = |XY|$, то, значит, расстояния сохраняются. Таким образом, центральная симметрия есть перемещение, меняющее каждый вектор на противоположный.

38.4. Поворот

Каждый представляет себе, как повернуть плоский предмет вокруг какой-нибудь точки (например, стрелку часов), и нам нужно только описать это наглядное представление в понятиях геометрии (рис. 139).

Пусть дана какая-нибудь точка O. На описанной вокруг нее окружности можно указать два направления обхода — по часовой стрелке и против нее (рис. 140). Этим задаются также два направления отсчета углов от исходящих из точки O лучей — по часовой стрелке или против нее.

Поворот фигуры F **вокруг центра** O состоит в том, что ее точкам X сопоставляются точки X' так, что, во-первых, $|OX'| = |OX|$, во-вторых, углы между отрезками OX и OX' равны для всех точек X и откладываются от OX к OX' в одну и ту же сторону (рис. 141).

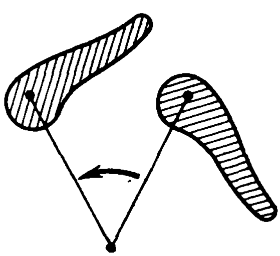


Рис. 139

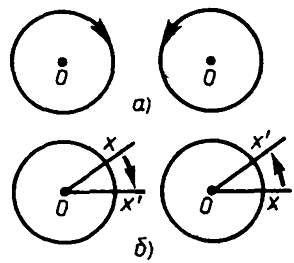


Рис. 140

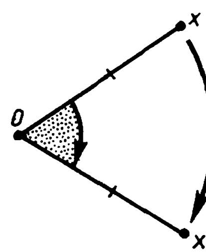


Рис. 141

Можно сказать, что отрезки OX поворачиваются на один и тот же угол в одну и ту же сторону. Если точка O принадлежит фигуре, то ей сопоставляется она сама.

Точка O называется **центром поворота,** угол между отрезками OX и OX' называется **углом поворота,** направление, в котором откладывается угол от OX к OX',— это **направление поворота.** Таким образом, поворот характеризуется центром, углом и направлением.

Если угол поворота равен 180°, то отрезки OX и OX' оказываются один продолжением другого, и так как они равны, то точки X и X' симметричны относительно точки O. Таким образом, *поворот на 180° — это центральная симметрия с центром в центре поворота.*

Теорема. ***Поворот сохраняет расстояния, т. е. является перемещением.***

Доказательство. Пусть при повороте вокруг точки O точкам X и Y сопоставляются точки X' и Y'. Покажем, что $|X'Y'| = |XY|$. Рассмотрим общий случай, когда точки O, X, Y не лежат на одной прямой. Так как отрезки OX и OY поворачиваются в одну и ту же сторону на один и тот же угол, то угол $X'OY'$ между OX' и OY' будет равен углу XOY между OX и OY. Действительно, пусть угол XOY от OX к OY отсчитывается в направлении поворота (рис. 142). (Если это не так, то рассматриваем угол YOX.) Тогда угол между OX и OY' равен сумме угла XOY и угла поворота (от OY к OY'):

$$\angle XOY' = \angle XOY + \angle YOY'. \tag{3}$$

С другой стороны, $\angle XOY' = \angle XOX' + \angle X'OY'$. (4)

Так как $\angle XOX' = \angle YOY'$ (как углы поворота), то из этого равенства и равенств (3) и (4) следует, что $\angle XOY = \angle X'OY'$.

Кроме того, сами отрезки равны: $|OX'| = |OX|$ и $|OY'| =$

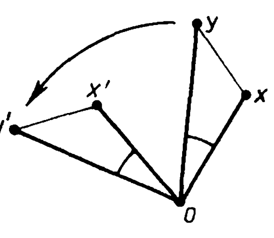


Рис. 142

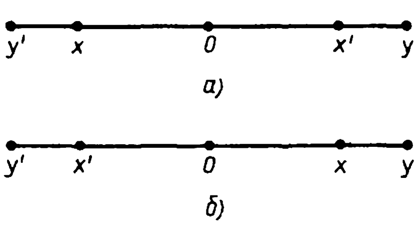


Рис. 143

$= |OY|$. Поэтому треугольник $X'OY'$ равен треугольнику XOY. Следовательно, $|X'Y'| = |XY|$.

В случае, когда точки X, O, Y лежат на одной прямой, то отрезки XY и $X'Y'$ будут либо суммой, либо разностью равных отрезков OX, OY и OX', OY' (рис. 143). Поэтому и в этом случае $|X'Y'| = |XY|$. Теорема доказана.

38.5. О равенстве отрезков, углов, треугольников

Докажем, что прежние определения равенства отрезков, углов и треугольников согласуются с общим определением равенства фигур, данным в п. 37.4. Доказательство разбивается на три части.

1) *Равные отрезки можно совместить перемещением.*

Доказательство. Пусть отрезки AB и $A'B'$ равны. Сопоставим их концы A и A' и каждой точке $x \in AB$ сопоставим такую точку $X' \in A'B'$, что $|A'X'| = |AX|$. Так как $|AB| = |A'B'|$, то получим преобразование всего отрезка AB в отрезок $A'B'$ с сохранением расстояний, т. е. перемещение.

2) *Равные углы можно совместить перемещением.* При этом угол ab можно перевести в равный ему угол $a'b'$ так, чтобы данная сторона перешла в данную, скажем a в a'.

Доказательство. Пусть углы ab и $a'b'$ с вершинами O и O' равны. Произведем перенос первого угла так, чтобы точка O перешла в точку O'. Получим угол, равный ab. При этом луч a перейдет в некоторый луч a''. Произведем поворот вокруг O' так, чтобы луч a'' перешел в луч a'. Получим равные углы $a'b'$и $a'b''$ с одной стороной a'. Если они лежат с одной стороны от a', то они совпадают, так как с одной стороны от луча можно отложить только один угол, равный данному.

Если углы лежат с разных сторон от a', то отразим угол $a'b''$ в прямой, содержащей луч a'. Тогда он перейдет в равный угол, который и есть угол $a'b'$, так как с одной етороны от луча a' можно отложить только один угол, равный данному. Утверждение 2 доказано.

3) *Равные треугольники можно совместить перемещением,* т. е. если у двух треугольников стороны равны, то точкам одного треугольника можно так сопоставить точки другого, что расстояния сохранятся.

Доказательство. Пусть у треугольников ABC и $A'B'C'$ стороны равны: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Тогда их углы равны, в частности $\angle A = \angle A'$. Произведем перемещение, переводящее угол A в угол A', так, чтобы луч AB перешел в луч $A'B'$. Согласно утверждению 2 это возможно.

При таком перемещении луч AC перейдет в луч $A'C'$. Отрезки AB и AC перейдут в отрезки на этих лучах. Они равны отрезкам $A'B'$ и $A'C'$. На данном луче можно отложить только один отрезок, равный данному. Поэтому отрезки AB и AC перейдут именно в $A'B'$ и $A'C'$. Тем самым вершины треугольника ABC перейдут в вершины треугольника $A'B'C'$. Как доказано в п. 37.2, треугольник переходит при перемещении в треугольник. Следовательно, треугольник ABC перейдет в треугольник $A'B'C'$. Утверждение доказано.

38.6. Об отражении света

Пусть точки A и B лежат с одной стороны от прямой a. Каков кратчайший путь из точки A в точку B, «заходящий» на прямую a, т. е. при каком условии длина $AC + CB$, если $C \in a$, будет наименьшей? О т в е т: если отрезки AC и CB образуют с прямой a равные углы (рис. 144). Доказательство получим, если возьмем точку B', симметричную точке B. Тогда $AC + CB = AC + CB'$, и эта сумма будет наименьшей, когда точка C лежит на отрезке AB'.

В физике рассматривают углы, которые отрезки AC и CB образуют с перпендикуляром к прямой a. Если AC — луч, падающий на прямую a, и CB — луч отраженный, то эти углы — угол падения и угол отражения. По закону отражения света (как и тела при упругом ударе) угол падения равен углу отражения. Свет распространяется из одной точки A в другую B так, что время его прохождения наименьшее (так называемый принцип Ферма; из него вытекают все законы отражения и преломления света).

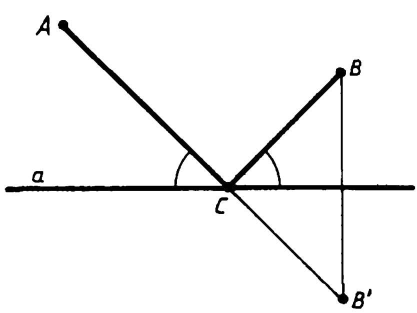


Рис. 144

Задачи к § 38

Задачи к п. 38.1

Основная задача

1. а) Объясните, почему в результате переноса прямая пе-

реходит в прямую, ей параллельную, или в себя. б) Даны две параллельные прямые. Каким переносом одна из них может быть получена из другой? в) Нарисуйте два равных и параллельных отрезка. Каким переносом один из них может быть получен из другого?

* * *

2. Нарисуйте любой треугольник. Назовите его ABC в порядке обхода по часовой стрелке. Нарисуйте любой вектор $\vec{a}$. Нарисуйте треугольник, в который переходит треугольник ABC при переносе на вектор $\vec{a}$. Пусть при этом точка A перешла в точку A', точка B перешла в точку B', точка C перешла в точку C'. Каков порядок обхода вершин A', B', C'?

3. Нарисуйте отрезок AB. Нарисуйте его образ в результате переноса на вектор: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{AC}$ при условии, что точка C не лежит на прямой AB; какую фигуру заметает при этом переносе отрезок AB; чему равна площадь этой фигуры, если $|AB| = |AC| = 1$, $\widehat{CAB} = \varphi$? При каком угле φ эта площадь наибольшая?

4. Равносторонний треугольник ABC подвергается переносу на вектор: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BK}$, где точка K — середина AC; в) $\overrightarrow{CO}$, где точка O — центр треугольника. Какая из его сторон при этом переносе заметает бóльшую площадь? Какое наблюдение можно сделать, сравнивая эти площади? Проверьте свое предположение для других переносов равностороннего треугольника. Проделайте аналогичную работу для других правильных многоугольников.

5. Нарисуйте любой треугольник. Нарисуйте его образ при переносе на какой-либо вектор. В результате переноса каждая его сторона заметает некоторую площадь. Докажите, что бóльшая из этих площадей равна сумме меньших. Используйте этот результат для доказательства теоремы Пифагора.

6. 1) Равносторонний треугольник ABC со стороной 2 перенесли на $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Рассмотрим две фигуры: объединение F_1 и пересечение F_2 исходного и полученного треугольников. а) Вычислите площадь и периметр F_1 и F_2. б) Вычислите радиус наименьшего круга, содержащего F_1 и F_2. в) Вычислите радиус наибольшего круга, содержащегося в F_1 и F_2.

2) Решите те же задачи при переносе $\triangle ABC$ на $\overrightarrow{BO}$, где точка O — центр треугольника.

3) Решите те же задачи для квадрата $ABCD$ со стороной 1, который перенесли на $\frac{1}{2}\ \overrightarrow{CA}$

7. Нарисуйте систему координат. В результате переноса она перешла в новую систему координат. Координаты нового начала координат точки O' — (2; 1).

1) Какие координаты в новой системе координат будут у точек, которые раньше имели координаты а) $(-5, 4)$; б) $(-4, -3)$; в) $(0, -5)$; г) $(-3, 0)$?

2) Какие уравнения будут теперь у фигур, которые раньше задавались такими уравнениями а) $y = 0$; б) $x = 0$, в) $x = 2$; г) $y = -2$; д) $y = x$; е) $y = -x + 1$; ж) $y = -2x + 3$; з) $x^2 + y^2 = 1$?

Изменяются ли координаты вектора в результате переноса системы координат?

Задачи к п. 38.3

Основная задача

8. Докажите, что: а) если прямая параллельна оси симметрии, то симметричная ей прямая также параллельна этой оси; б) если прямая пересекает ось симметрии, то симметричная ей прямая пересекает эту ось в той же точке, что и исходная прямая; в) если прямая перпендикулярна оси симметрии, то она в результате этой симметрии совмещается сама с собой.

* * *

9. Нарисуйте отрезок. Постройте отрезок, симметричный ему относительно прямой: а) содержащей его; б) проходящей через его конец; в) проходящей через точку внутри его; г) параллельной ему; д) проходящей мимо него и не параллельно ему.

10. Решите задачу, аналогичную задаче 2, для осевой симметрии.

11. Нарисуйте правильный треугольник. Отразите его от каждой из его сторон. Какая фигура является объединением данного и полученных треугольников?

12. Нарисуйте равносторонний треугольник. Отразите его от: а) средней линии; б) прямой, перпендикулярной стороне и проходящей через середину другой стороны. Нарисуйте объединение исходного и полученного треугольников. Вычислите его площадь и периметр, если сторона треугольника равна 2.

13. Дан квадрат $ABCD$. K — середина AD, Z — середина CD. Отразите его от: а) прямой KZ; б) прямой AZ; в) прямой, проходящей через его центр (но не через вершину).

Нарисуйте объединение исходного и полученных квадратов. Вычислите его площадь и периметр, если сторона квадрата равна 1.

14. Нарисуйте прямоугольник. Отразите его от прямой, проходящей через диагональ. Нарисуйте объединение исходного и полученного прямоугольников. Чему равны его площадь и периметр, если стороны прямоугольника равны d_1 и d_2?

15. Дан ромб $ABCD$ с острым углом φ и стороной d. Из вершины B провели высоту на AD. Отразите от нее ромб. Нарисуйте объединение исходного и полученного ромбов. Вычислите для него площадь и периметр.

16. Треугольник ABC равносторонний. Нарисуйте точку D так, чтобы выпуклый четырехугольник с вершинами в точках A, B, C, D имел ось симметрии. Решите такую же задачу для равнобедренного треугольника; прямоугольного треугольника; произвольного треугольника.

17. Вектор $\vec{b}$ получен из вектора $\vec{a}$ отражением в прямой. Как расположен по отношению к этой прямой вектор: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$?

Задачи к п. 38.4

Основная задача

18. а) Докажите, что в результате центральной симметрии прямая переходит в параллельную ей прямую или в себя. б) Две прямые параллельны. Какой центральной симметрией одна из них получается из другой? Сравните этот результат с тем, который был получен в аналогичной задаче для переноса. Что общего и какая разница в этих результатах? в) Нарисуйте два равных и параллельных отрезка. Можно ли один из них получить из другого в результате центральной симметрии?

* * *

19. Решите задачу, аналогичную задаче 2, для центральной симметрии.

20. Нарисуйте квадрат. Отметьте точку, которая лежит на его диагонали посередине между центром квадрата и его вершиной. Примите ее за центр симметрии. Постройте квадрат, симметричный данному относительно этой точки. Пусть F_1 — объединение исходного и полученного квадратов, а F_2 — их пересечение. Вычислите периметр и площадь как F_1, так и F_2, если сторона исходного квадрата равна 2.

21. Решите задачу, аналогичную 20, для равностороннего треугольника со стороной 1. При этом рассмотрите его центральную симметрию относительно: а) середины высоты; б) центра треугольника.

22. Решите задачу, аналогичную 20, для трапеции, у которой три стороны равны 1, а четвертая равна 2. При этом рассмотрите центральную симметрию относительно: а) вершины трапеции; б) середины большей стороны; в) середины боковой стороны; г) точки пересечения ее диагоналей.

23. Решите задачу, аналогичную 20, для круга радиусом 4. При этом рассмотрите центральную симметрию относительно: а) середины какого-либо ее радиуса; б) точки, удаленной от центра на 1; в) точки, удаленной от центра на 3.

Задачи к п. 38.5

24. Решите задачу, аналогичную задаче 2, для поворота.

25. Нарисуйте отрезок AB. Нарисуйте его образ в результате поворота: а) вокруг A на 120° по часовой стрелке; б) вокруг B на 60° против часовой стрелки; в) вокруг середины отрезка на 45° по часовой стрелке; г) вокруг точки O, лежащей на серединном перпендикуляре к отрезку, на 90° против часовой стрелки.

26. Нарисуйте прямую. Отметьте точку вне ее. Нарисуйте ее образ в результате поворота по часовой стрелке на угол: а) 45°; б) 90°; в) 150°.

27. Отрезок повернули на угол 30° вокруг данной точки. Чему равен угол между новым и старым положением отрезка? Обобщите задачу.

28. Нарисуйте квадрат $ABCD$. Нарисуйте его образ в результате поворота по часовой стрелке: а) вокруг A на 135°; б) вокруг B

на 90°; в) вокруг C на 45°; г) вокруг D на 30°; д) вокруг O — центра квадрата на 45°.

Пусть площадь квадрата равна S. В каждом случае найдите площадь объединения исходного и полученного квадратов.

29. Нарисуйте прямоугольник. Его повернули вокруг точки пересечения диагоналей на 90°. Пусть его стороны d_1 и d_2. Чему равна площадь объединения исходного и полученного прямоугольников?

30. Нарисуйте равносторонний треугольник ABC. Нарисуйте его образ в результате поворота против часовой стрелки: а) вокруг A на 120°; б) вокруг B на 60°; в) вокруг C на 30°; г) вокруг середины отрезка AC на 90°. В случаях в) и г) найдите площадь объединения исходного и полученных треугольников, если площадь ABC равна S.

31. Равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 1 повернули на угол 45° относительно вершины прямого угла. Чему равна площадь общей части исходного и полученного треугольников?

§ 39. СИММЕТРИЯ ФИГУР

39.1. Симметрия

На рисунке 145 изображены симметричные фигуры. Каждая из них симметрична относительно некоторой прямой, которая является их осью симметрии. А на рисунке 146 изображены тоже симметричные фигуры, но другого типа. Они симметричны относи-

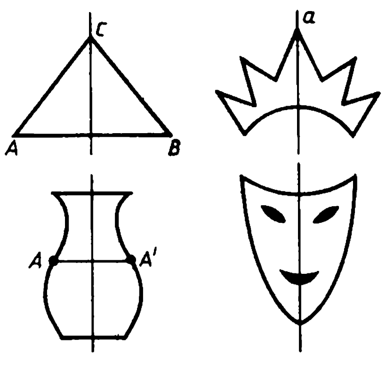


Рис. 145

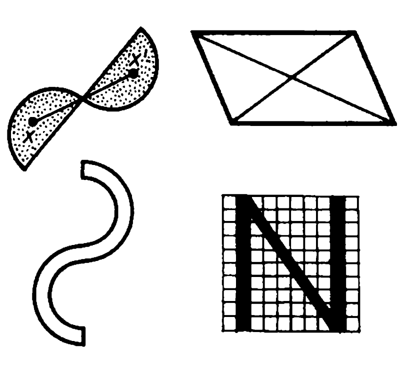


Рис. 146

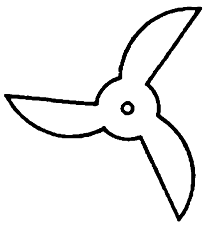


Рис. 147

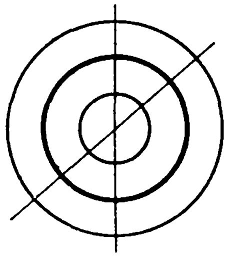


Рис 148

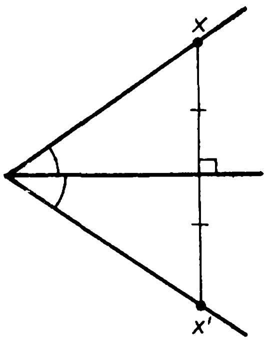


Рис 149

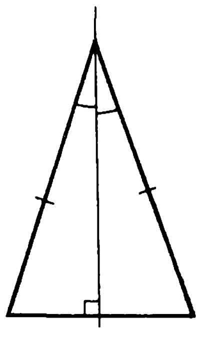


Рис 150

тельно некоторой точки, которая является их центром симметрии.

Вообще говорят, что **фигура обладает симметрией** или что она симметрична, если существует перемещение (не тождественное), переводящее ее саму в себя.

Центральная симметрия — это частный случай вращательной симметрии, так как она равносильна повороту на 180°.

Вообще говорят, что фигура обладает **вращательной симметрией,** если она переводится в себя каким-нибудь поворотом (понятно, что на ненулевой угол; рис. 147). Центр поворота будет центром вращательной симметрии фигуры.

Самая симметричная из всех фигур конечных размеров — это круг или окружность и вообще любая фигура, состоящая из концентрических окружностей (рис. 148). Всякая прямая, проходящая через центр круга, служит его осью симметрии, и центр круга служит центром вращательной симметрии с поворотом на любой угол. (Между прочим, такой же симметрией обладает и одна точка.)

Рассмотрим «элементы симметрии» простейших фигур.

1) Отрезок имеет две оси симметрии (какие?) и центр симметрии (где он расположен?).

2) Всякий угол имеет ось симметрии — прямую, содержащую его биссектрису (рис. 149).

3) Треугольник общего вида не имеет никакой симметрии. Равнобедренный треугольник имеет ось симметрии (рис. 150). Теорема о том, что у него медиана является высотой, и доказывает это. Медиана служит также и биссектрисой угла при вершине.

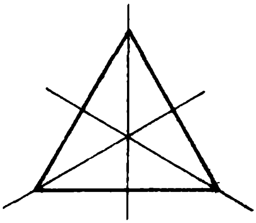


Рис 151

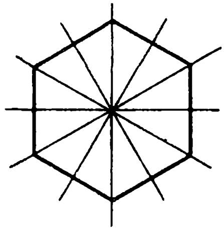


Рис 152

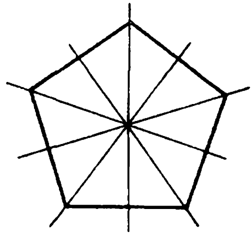


Рис 153

4) У равностороннего треугольника три оси симметрии, и он имеет вращательную симметрию с поворотом на 120° (рис. 151).

5) У всякого правильного n-угольника есть n осей симметрии, все они проходят через его центр (центр описанной окружности). Он имеет также вращательную симметрию с поворотом на угол в $\frac{360°}{n}$ вокруг центра.

При четном n одни оси симметрии проходят через противоположные вершины, другие — через середины противоположных сторон (и тех и других осей по $\frac{n}{2}$, рис. 152). При нечетном n каждая ось проходит через вершину и середину противоположной стороны (рис. 153).

Поворотом на $\frac{360°}{n}$ многоугольник совмещается Он совмещается также и поворотом на углы $2 \cdot \frac{360°}{n}$, $3 \cdot \frac{360°}{n}$ и вообще поворотом на угол $m \cdot \frac{360°}{n}$, где m — натуральное (при этом в обоих направлениях в одну и в другую сторону, рис. 151—152)

Вообще если фигура переводится в себя поворотом на угол α, то она переводится в себя поворотом на любой угол $n\alpha$, где n — натуральное (вокруг того же центра). Действительно, пусть при повороте на угол α фигура совместилась сама с собой Раз она совместилась сама с собой, то она допускает еще один такой же поворот на угол α. Но вместе с предыдущим поворотом это даст поворот на угол 2α (из исходного положения). Продолжая, получим повороты на угол 3α и т. д. Точно так же если фигура совмещается с собой поворотом в одном направлении, то она совмещается с собой обратным поворотом на равный угол в противоположном направлении

39.2. Симметрия неограниченных фигур

Фигура называется **ограниченной,** если расстояние между ее точками не превосходит какого-либо данного расстояния d. Тогда вся фигура содержится в круге радиуса d с центром в любой своей точке A (так как расстояния всех ее точек от A не больше d).

Если же в фигуре есть сколь угодно большие расстояния, то фигура называется **неограниченной,** она не умещается ни в каком круге.

Пока мы рассматривали симметрию ограниченных фигур. При этом переносы фигур не участвовали.

Если фигура переводится в себя каким-либо переносом (ненулевым), то она неограничена.

В самом деле, допустим, фигура F совместилась сама с собой при переносе на вектор $\vec{a}$. Тогда любая ее точка A перешла в такую точку A_1, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$ (рис. 154). Но если фигура F перешла в себя, то и точка A_1 ей принадлежит. Поэтому перенос на вектор $\vec{a}$ переводит точку A_1 в точку A_2, такую, что $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}$. А тогда

$$\overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = 2\vec{a}.$$

Так как фигура совместилась сама с собой, то она должна содержать точку A_2. Точно так же убедимся, что она должна содержать и точку A_3, такую, что $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{a}$, так что $\overrightarrow{AA_3} = 3\vec{a}$ и т. д.

Получается, что фигура содержит бесконечный ряд точек, сдвинутых одна за другой на вектор $\vec{a}$. Значит, фигура неограничена.

О фигуре, совмещающейся сама с собой при некотором переносе, можно сказать, что она тоже обладает симметрией по переносу. Например, прямая допускает любой перенос вдоль себя.

Самая симметричная фигура — это вся плоскость, она отображается на себя всяким перемещением.

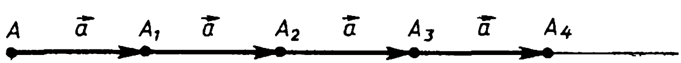


Рис 154

Представляют интерес бесконечные фигуры, состоящие из правильно повторяющихся конечных фигур, такие, как квадратная сетка, сетка из прямоугольников, или треугольников, или шестиугольников и др. (рис. 155).

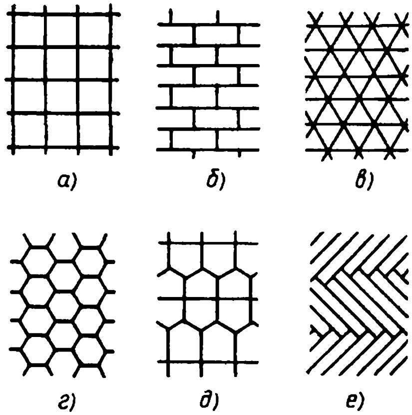


Рис. 155

Реально строить неограниченные фигуры невозможно, но мы можем мысленно продолжить ограниченную фигуру, «перенеся» ее части, как, например, мы легко продолжаем мысленно квадратную сетку. Поэтому мы понимаем симметричность «по переносу» стены, выложенной кафелем, кирпичной стены, поверхности пчелиных сот, паркета.

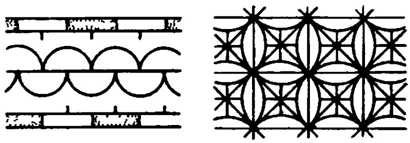


Рис. 156

Так же мы понимаем симметричность по переносу разнообразных орнаментов (рис. 156). Во всех этих примерах фигуры, кроме переносов, допускают еще и другие перемещения, совмещающие их сами с собой. Квадратная сетка, например, допускает все перемещения, совмещающие квадрат сам с собой.

39.3. О симметрии

Как уже сказано, симметрией фигуры вообще называется свойство фигуры, состоящее в том, что существует ее перемещение (нетождественное), совмещающее ее саму с собой.

Слово «симметрия» происходит от греческого и означает «соразмерность». В таком общем смысле симметрия играет огромную роль в искусстве, особенно ясную в орнаментах и архитектуре, где постоянно встречается симметрия в достаточно точном геометрическом смысле, как, скажем, в симметрии фасадов домов и др. (рис. 157).

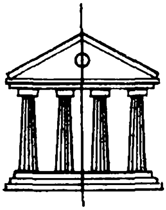


Рис. 157

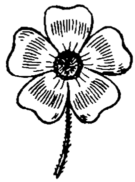


Рис. 158

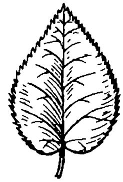


Рис. 159

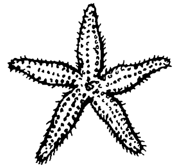


Рис. 160

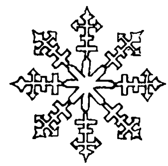


Рис. 161

Симметрия широко встречается в природе, в особенности у кристаллов, у растений и животных, например симметрия цветка (рис. 158), листа (рис. 159) или морской звезды (рис. 160). Поразительные по красоте примеры симметрии дают снежинки (рис. 161).

§ 40. ПОДОБИЕ

На практике постоянно встречаются преобразования, при которых все расстояния изменяются в одном и том же отношении, т. е. умножаются на одно и то же число. Такие преобразования называются подобными (или подобием), а это число называется коэффициентом подобия. Например, при увеличении фотографии все размеры (расстояния на фотографии) увеличиваются в одном и том же отношении, т. е. происходит подобное отображение с фотопленки на фотобумагу. То же происходит при проектировании на экран кинопленки. Подобное преобразование совершается и тогда, когда делают уменьшенную копию чертежа, рисунка и т. п. или когда чертят план квартиры, местности, города и т. п., только здесь коэффициент подобия меньше единицы, поскольку происходит уменьшение размеров (рис. 162).

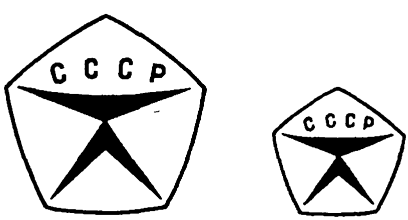


Рис. 162

Когда все размеры изменяются — увеличиваются или уменьшаются — одинаково, то отношение размеров сохраняется; получается правильное изображение. Правильное изображение и получается при подобии.

После этих предварительных замечаний перейдем к точным определениям.

40.1. Определение подобия и гомотетии

Подобным преобразованием или **подобием фигуры** F называется такое ее преобразование, при котором все расстояния в фигуре F изменяются в одном и том же отношении. Это означает следующее: имеется такое число $k > 0$, что любым точкам X и Y фигуры F сопоставляются такие точки X' и Y', что (рис. 163)

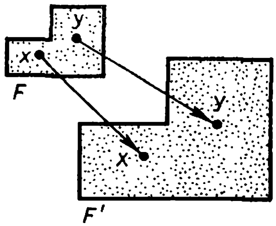


Рис. 163

$$|X'Y'| = k|XY|. \qquad (1)$$

Число k называется **коэффициентом подобия.**

Перемещение является подобием с коэффициентом $k = 1$. Простейшим примером подобного преобразования, отличным от перемещения, является гомотетия.

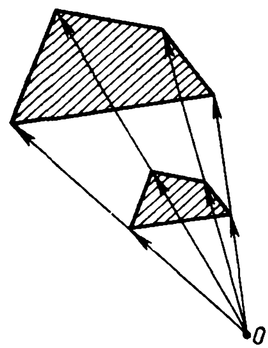


Рис. 164

Гомотетией с центром O **и коэффициентом** k, отличным от нуля, называется преобразование, при котором все радиус-векторы с началом O умножаются на k (рис. 164). Это означает следующее: гомотетия с центром O и коэффициентом k любой точки X сопоставляет такую точку X', что

$$\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}. \qquad (2)$$

Не исключается, что $k < 0$. Тогда радиус-векторы изменяют направление на противоположное (рис. 165). При $k = -1$ получается центральная симметрия с центром в точке O. При $k = 1$ имеем тождественное преобразование.

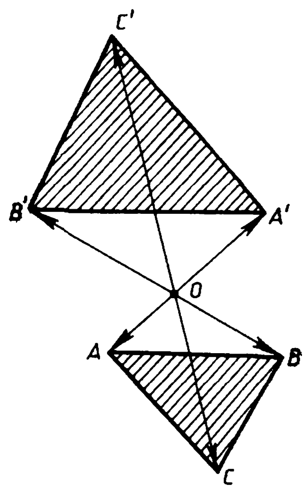


Рис. 165

Покажем, что *гомотетия является подобием с коэффициентом* $|k|$. Для этого надо доказать, что все расстояния изменяются одинаково. Мы докажем даже больше, а именно что при гомотетии с коэффициентом k каждый вектор умножается на k. Подробнее: если точки X, Y при гомотетии с коэффициентом k перешли в точки X', Y', то

$$\overrightarrow{X'Y'} = k\overrightarrow{XY}. \tag{3}$$

Действительно, при гомотетии с центром O и коэффициентом k любые точки X, Y переходят в такие точки X', Y', что

$$\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX},\ \overrightarrow{OY'} = k\overrightarrow{OY}. \tag{4}$$

Поэтому

$$\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OY} - k\overrightarrow{OX} = k(\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}) = k\overrightarrow{XY},$$

т. е. выполняется равенство (3). Из равенства (3) следует, что

$$|X'Y'| = |k||XY|,$$

т. е. при гомотетии все расстояния умножаются на $|k|$. Это и значит, что гомотетия с коэффициентом k есть подобие с коэффициентом $|k|$. Гомотетию с положительным коэффициентом можно определить как подобное уменьшение при $k < 1$ или подобное увеличение при $k > 1$ из данного центра.

40.2. Подобные фигуры

Фигура F' называется **подобной фигуре F с коэффициентом k**, если существует подобие с коэффициентом k, переводящее F в F'.

Другими словами, фигура F' подобна F, если ее точки можно так сопоставить точкам фигуры F, что все расстояния изменятся в одном и том же отношении.

Раньше мы определили подобные треугольники так: два треугольника подобны, если их стороны пропорциональны. Здесь сравниваются расстояния между вершинами, а не между любыми точками. Однако выполняется следующая теорема: треугольники, стороны которых пропорциональны, являются подобными фигурами (в смысле определения, данного в этом пункте). Доказательство этой теоремы дается в п. 40.5.

Для многоугольников выполняется аналогичная теорема: если у двух многоугольников стороны и диагонали соответственно пропорциональны, то многоугольники подобны.

40.3. Свойства подобия

Среди основных свойств подобия есть свойства, аналогичные свойствам перемещений.

Свойство 1. ***Если при подобном преобразовании точки A, B перешли в точки A', B', то точки, лежащие на отрезке AB, перешли в точки, лежащие на отрезке $A'B'$, а точки, не лежащие на отрезке AB,— в точки, не лежащие на отрезке $A'B'$.***

Доказательство. Если точка M принадлежит отрезку AB, то

$$|AM| + |MB| = |AB|,$$

а если M не принадлежит AB, то

$$|AM| + |MB| > |AB|.$$

Поэтому если все расстояния умножаются на одно и то же положительное число, то эти соотношения сохраняются.

Отсюда же, как и в случае перемещений, следует, что *при подобии точки, лежащие на одной прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, треугольник переходит в треугольник.*

Свойство 2. ***Подобие сохраняет углы.*** Подробнее: если точки A, B, C при подобии перешли в точки A', B', C', то угол между отрезками AB и AC равен углу между $A'B'$ и $A'C'$.

Доказательство. Действительно, если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то A', B', C' тоже не лежат на одной прямой. Тем самым мы имеем треугольники ABC и $A'B'C'$ с пропорциональными сторонами (поскольку расстояния умножаются на одно и то же число). По теореме о равенстве углов подобных треугольников углы у этих треугольников равны, в частности $\angle A' = \angle A$.

Если же точки A, B, C лежат на одной прямой, то $\angle A = 180°$ или равен 0°, смотря по тому, лежит ли точка A на отрезке BC или нет (рис. 166). Такое же расположение будет у точки A' относи-

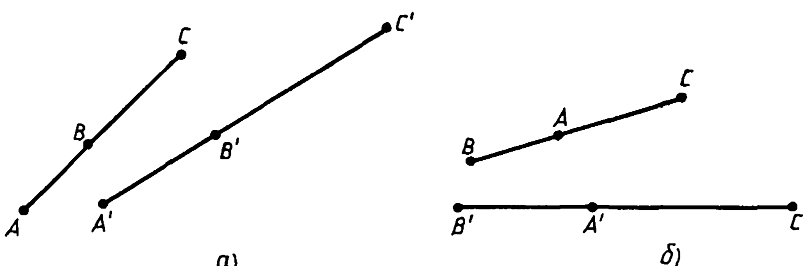


Рис. 166

тельно отрезка $B'C'$, и, значит, угол A' будет такой же, что и требовалось доказать.

Важным является следующее свойство.

Свойство 3. ***При подобии с коэффициентом k площадь каждой фигуры умножается на k^2.***

Доказательство. Действительно, площадь треугольника равна половине произведения длин двух его сторон на синус угла между ними. При подобии с коэффициентом k длины сторон умножаются на k, а угол сохраняется. Поэтому площадь треугольника умножается на k^2.

Многоугольные фигуры слагаются из треугольников. Поэтому их площади при подобии также умножаются на k^2 (сумма умножается на k^2, если каждое слагаемое умножается на k^2).

40.4. Масштаб

При переходе от данной фигуры к подобной ей фигуре с коэффициентом подобия k численные значения длин соответствующих отрезков умножаются на k.

Определить численные значения длин можно, приняв за единицу измерения любой отрезок. Если единица заменяется на другую с длиной, в k раз большей, то численные значения длин делятся на k. Например, так происходит при переходе от сантиметров к метрам.

Сопоставляя два отмеченных факта, приходим к следующему выводу.

Если одновременно с переходом к подобной фигуре произвести такое же изменение единицы длины, то численные значения длин не изменяются. Если фигура, скажем, подобно уменьшилась в n раз и одновременно единица измерения уменьшена в n раз, то численные значения будут те же самые.

Этот простой вывод играет очень важную роль.

Если изобразить фигуру на чертеже, уменьшая длины в n раз, и при этом взять в n раз меньшую единицу измерения, то численные значения длин не изменятся. Поэтому никакие пересчеты не будут нужны. Если, скажем, на чертеже 1 мм соответствует 1 м, то, считывая с чертежа длины в миллиметрах, можно сразу говорить о них в метрах. Так и поступают при графических решениях.

Отношение расстояний на чертеже к тем расстояниям, которые они изображают, называется масштабом. В нашем примере это отношение равно 0,001, так как 1 мм равен 0,001 м. Говорят:

«чертеж выполнен в масштабе 0,001» или «в масштабе 1 метр в миллиметре». Так как масштаб показывает, во сколько раз изменяются длины, то при изображении фигуры масштаб — это коэффициент подобия.

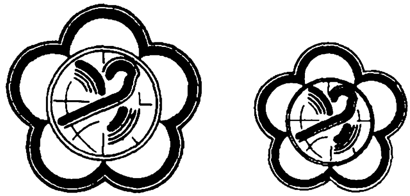
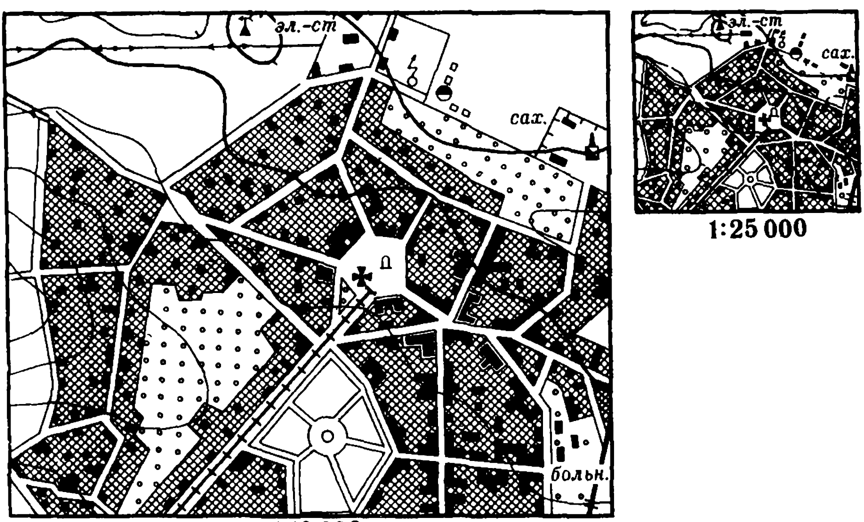


Рис 167

Подобие фигур лежит в основе их изображения; правильное, не искаженное изображение подобно изображаемому (рис. 167). Всякий план, будь то план города или квартиры, представляет собой подобное изображение. Изображаемый объект рассматривается как плоская фигура, и в плане рисуется подобная ей фигура. Например, город представляется как фигура, состоящая из кварталов застройки и улиц; кварталы застройки представляют собой многоугольную фигуру. На плане изображается подобная ей фигура (рис. 168).

Масштаб, в котором выполнен план, не что иное, как коэффициент подобия. Когда пишут, например, масштаб 1:100000, это и значит, что коэффициент подобия равен 0,00001, иначе говоря, масштаб — 1 километр в сантиметре. При этом численные значения длин на плане те же, что в действительности. Только на плане



1:10 000

1:25 000

Рис 168

эти значения берутся в масштабе — в сантиметрах, а в действительности — в километрах. Пользуясь планами и картами, так и определяют по ним расстояния.

З а м е ч а н и е. Вполне точное подобное изображение земной поверхности на картах невозможно: отношения длин неизбежно искажаются, так как земля не плоская. Но для сравнения небольших участков это несущественно.

40.5. О подобии треугольников

Докажем, что ***треугольники, стороны которых пропорциональны, являются подобными фигурами*** (в смысле определения, данного в п. 40.2).

Подробнее: если у треугольников ABC и $A'B'C'$

$$|A'B'| = k|AB|,\ |B'C'| = k|BC|,\ |C'A'| = k|AC|, \qquad (5)$$

то между их точками есть такое соответствие, что для каждой пары точек X, Y из треугольника ABC и соответствующих им точек X', Y' выполняется равенство

$$|X'Y'| = k|XY|. \qquad (6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подвергнем треугольник ABC гомотетии с коэффициентом k и с центром, например, в точке A (рис. 169). Тогда треугольник ABC перейдет в некоторый треугольник AB_1C_1, причем для каждой из двух точек X, Y треугольника ABC и соответствующих точек X_1, Y_1 треугольника AB_1C_1 выполняется:

$$|X_1Y_1| = k|XY|. \qquad (7)$$

В частности, для длин сторон этих треугольников получим:

$$|AB_1| = k|AB|,\ |B_1C_1| = k|BC|,\ |C_1A| = k|CA|. \qquad (8)$$

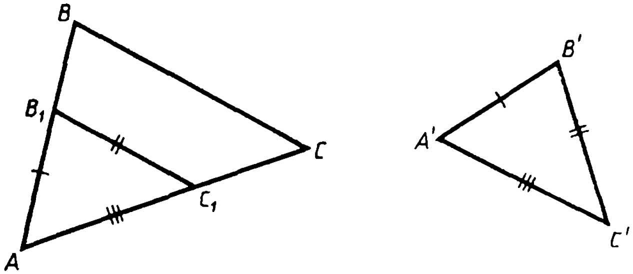


Рис 169

Сравнивая (5) и (8), видим, что у треугольников $A'B'C'$ и AB_1C_1 стороны равны. Поэтому, как доказано в п. 38.3, треугольник AB_1C_1 можно перемещением перевести в треугольник $A'B'C'$.

В результате треугольник ABC перейдет в треугольник $A'B'C'$: сначала гомотетией в треугольник AB_1C_1, а потом перемещением треугольника AB_1C_1 в треугольник $A'B'C'$. Результат последовательно выполненных гомотетии и перемещения есть подобие. Следовательно, треугольник ABC является фигурой, подобной треугольнику $A'B'C'$, что и требовалось доказать.

Задачи к § 40

Задачи к п. 40.1

Свойства подобия

1. Докажите, что: а) в результате подобия пересечение фигур переходит в пересечение их образов; б) в результате подобия объединение фигур переходит в объединение их образов.

2. Объясните, почему в результате подобия: а) середина отрезка переходит в середину отрезка; б) перпендикулярные прямые переходят в перпендикулярные прямые; в) параллельные прямые переходят в параллельные прямые; г) пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся прямые; д) окружность переходит в окружность, а круг — в круг; е) касательная к окружности переходит в касательную к окружности.

3. Пусть в результате подобия треугольник перешел в треугольник. Почему при этом сохраняется (по сторонам и углам) вид треугольника? Что при этом преобразовании является образом: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты; г) центра вписанной окружности; г) центра описанной окружности?

4. Два треугольника подобны. Отметьте точку в одном из них и укажите ее образ в другом.

5. Могут ли быть подобны треугольники ABC и ABD и треугольники ABD и ACD: а) в параллелограмме $ABCD$; б) в трапеции $ABCD$?

6. Два прямоугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ подобны. K — середина AD, K_1 — середина A_1D_1. Докажите, что угол между AC и BK равен углу между A_1C_1 и B_1K_1. Придумайте похожую задачу.

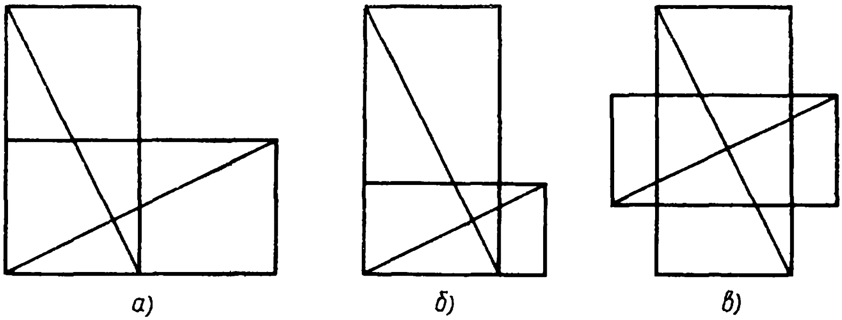


Рис 170

7. На рисунках 170 представлены два равных прямоугольника или два подобных прямоугольника. Докажите, что их диагонали перпендикулярны.

8. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\widehat{C} = 90°$), CD — его высота, точка K — середина CD, точка Z — середина BD. Докажите, что прямые AK и CZ перпендикулярны.

9. Нарисуйте любую фигуру F и в ней отрезок AB Нарисуйте теперь любой отрезок A_1B_1. а) Укажите подобное преобразование F, при котором AB перейдет в A_1B_1. б) Пусть теперь $C \in F$, $C \notin AB$. Укажите подобие F, при котором $\triangle ABC$ перейдет в $\triangle A_1B_1C_1$. в) Пусть теперь $X \in F$, $X \notin ABC$. Найдите образ X при подобии, переводящем треугольник ABC в $\triangle A_1B_1C_1$.

10. Пусть точки A и B симметричны относительно точки O. В результате подобия точки O, A и B перешли соответственно в точки O_1, A_1, B_1. Докажите, что A_1 и B_1 будут симметричны относительно O_1. Составьте аналогичные задачи.

Гомотетия

Основные задачи

11. Какая фигура получится в результате гомотетии: а) луча; б) угла; в) треугольника; г) правильного многоугольника; д) окружности?

12. Докажите, что в результате гомотетии отрезок (прямая) переходит в отрезок (прямую), параллельный данному, если центр гомотетии не лежит на отрезке (прямой). Верно ли обратное?

13. Дана точка A с координатами (x, y). Каковы координаты точки, в которую переходит A в результате гомотетии с коэффициентом k и центром: а) $(0, 0)$; б) (a, b)?

* * *

14. а) Отметьте O — центр гомотетии и точку A. Постройте образ точки A, если $k = 2$; $\frac{1}{3}$; -4. б) Пусть O — центр гомотетии, а некоторая точка A перешла в точку A'. Возьмите любую точку X плоскости. Постройте ее образ в этой гомотетии.

15. Нарисуйте треугольник ABC. Постройте треугольник, ему гомотетичный: а) с центром A и $k = 2$; б) с центром B и $k = \frac{1}{2}$; в) с центром C и $k = -2$; г) с центром A_1 — серединой BC и $k = 2$; д) с центром B_1 — серединой AC и $k = -\frac{1}{2}$; е) с центром Γ — точкой пересечения медиан и $k = 2$, ж) с центром T и $k = -\frac{1}{2}$

16. Нарисуйте квадрат $ABCD$. Нарисуйте гомотетичный ему квадрат: а) с центром на стороне и $k = -\frac{2}{3}$; б) с центром на средней линии и $k = -\frac{1}{3}$; в) с центром на диагонали и $k = 2$.

17. Нарисуйте окружность. Постройте ей гомотетичную: а) с центром на окружности; б) с центром внутри окружности; в) с центром вне окружности. Решите задачи а), б) и в) для $k = 2$, $k = \frac{1}{2}$ и $k = -2$.

18*. Нарисуйте фигуру, гомотетичную: а) тетраэдру; б) кубу; в) правильной четырехугольной пирамиде.

Центр и коэффициент гомотетии выберите сами

19. $ABCD$ — квадрат. а) На лучах AB, AC, AD отмечены точки B_1, C_1, D_1 (соответственно) так, что $AB_1{:}AB = AC_1{:}AC = AD_1{:}AD$. Докажите, что $AB_1C_1D_1$ — квадрат. б) Отметьте любую точку O Проведите лучи OA, OB, OC, OD. На этих лучах отметьте точки $A_1B_1C_1D_1$ так, что $OA_1 = 2OA$, $OB_1 = 2OB$, $OC_1 = 2OC$, $OD_1 = 2OD$. Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат.

Придумайте аналогичные задачи с другими фигурами.

20. Дана точка A с координатами (x, y). Найдите координаты ее образа в результате гомотетии: а) с центром O и $k = 2$; б) с центром O и $k = -3$; в) с центром $P(0, 1)$ и $k = 3$; г) с центром $P(-2, 3)$ и $k = -2$.

21. Три точки A, B, C лежат на одной прямой. Пусть A — центр гомотетии, при которой B переходит в C. Как вычислить коэффициент гомотетии?

22. Нарисуйте отрезок AB Его концы гомотетичны, т. е. B есть образ A в результате гомотетии. Где находится центр этой гомотетии, если $k = 2$; $\frac{1}{3}$; -4?

23. В результате гомотетии точка $A(-1, 2)$ перешла в точку B. Каковы центр гомотетии и ее коэффициент, если B имеет координаты: а) $(-2, 4)$; б) $(3, -6)$; в) $(0, 0)$; г) $(-1, 4)$; д) $(-4, 2)$; е) $(3, 3)$?

Задачи к п. 40.2, 40.3

Подобные фигуры

Основные задачи

24. Докажите, что подобны: а) два квадрата; б) два круга; в)* два шара; г) две полосы; д) два правильных n угольника; е) два прямоугольника, стороны которых пропорциональны.

25. Каковы признаки подобия двух: а) равнобедренных треугольников; б) прямоугольников; в) ромбов; г) параллелограммов; д) равнобедренных трапеций; е) трапеций; ж) секторов; з) сегментов; и) колец?

26. Объясните, почему являются подобными фигурами два треугольника, у которых: а) есть два равных угла; б) есть по равному углу и пропорциональны стороны, заключающие этот угол.

* * *

27. Нарисуйте два прямоугольника. Проверьте с помощью транспортира, подобны ли они.

28. Нарисуйте прямоугольник. Постройте прямоугольник, подобный данному: а) меньший данного; б) больший данного.

29. Нарисуйте отрезок. Он является общей стороной двух подобных (неравных) прямоугольников. Постройте их. Подобен ли им прямоугольник, являющийся объединением этих прямоугольников?

30. Нарисуйте прямоугольник со сторонами 6 и 2 см. Перпендикулярно большей стороне проведите прямую так, чтобы она отсекла прямоугольник со сторонами 1 и 2 см. а) Выясните, есть ли на рисунке подобные прямоугольники. б) Пусть эта прямая движется, оставаясь перпендикулярной большей стороне прямоугольника. Могут ли на рисунке получиться подобные прямоугольники? Разберите три случая: 1) подобие частичных прямоугольников; 2) подобие большего частичного целому; 3) подобие меньшего частичного целому.

31. Разделите прямоугольник на два прямоугольника так, чтобы: а) получилась одна пара подобных прямоугольников; б) получились две пары подобных прямоугольников; в) получились три пары подобных прямоугольников.

32. Нарисуйте прямоугольник, а в нем диагональ. Внутри этой диагонали возьмите точку. а) Из нее опустите перпендикуляры на две соседние стороны прямоугольника. Докажите, что на рисунке образовался прямоугольник, подобный данному. б) Опустите из нее перпендикуляры и на другие две стороны прямоугольника. Сколько на этом рисунке есть прямоугольников, подобных данному?

33. Нарисуйте прямоугольник. Отметьте внутри его любую точку, не лежащую на его диагонали. Проведите из нее перпендикуляры на две соседние стороны. Будет ли полученный прямоугольник подобен данному?

34. Можно ли разбить квадрат на два подобных прямоугольника?

35. Рамка картины имеет одну и ту же ширину. Подобны ли картина и картина в рамке?

ВЫВОДЫ

В этой главе были рассмотрены два самых важных вида преобразований фигур на плоскости: перемещения и подобия.

Перемещение — это преобразование, сохраняющее расстояния. Перемещение сохраняет расстояния, а потому сохраняет все, что определяется расстоянием: отрезок оно переводит в отрезок, треугольник — в треугольник, сохраняет величины углов, сохраняет площади и т. д.

Мы рассмотрели такие перемещения.

1. *Параллельный перенос*. Параллельным переносом фигуры называется преобразование, при котором все точки фигуры перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние (п. 38.1). Параллельный перенос задается вектором: если при параллельном переносе точке X сопоставлена точка X', то вектор $\overrightarrow{XX'}$ и есть вектор переноса.

2. *Отражение в прямой.* Отражением в прямой a фигуры F называется преобразование, сопоставляющее каждой точке фигуры F симметричную ей точку относительно прямой a (п. 38.2). Отражение в прямой называется также осевой симметрией.

3. *Поворот.* Поворотом фигуры F вокруг точки O называется преобразование, при котором точки фигуры F перемещаются так, что все отрезки, проведенные из O, поворачиваются в одну и ту же сторону на один и тот же угол, а длины их не изменяются (п. 38.4).

Частным случаем поворота является *центральная симметрия* — это поворот на 180° (п. 38.3).

4. *Подобие.* Подобием называется преобразование, при котором все расстояния изменяются в одном и том же отношении, т. е. умножаются на одно и то же число. Это число называется коэффициентом подобия.

Перемещение является подобием с коэффициентом, равным единице.

Простейшим подобным преобразованием, отличным от перемещения, является **гомотетия.** Гомотетией с центром O и коэффициентом k, отличным от нуля, называется преобразование, при котором все радиус-векторы с началом O умножаются на k.

Из свойств подобия напомним следующие: подобие сохраняет углы; при подобии с коэффициентом k площадь каждой фигуры умножается на k^2.

§ 41. ОСНОВАНИЯ ПЛАНИМЕТРИИ

41.1. Постановка вопроса об основаниях геометрии

Еще в начале нашего курса было сказано, что в геометрии только самые начальные сведения берутся из практики и наблюдения, они наглядны и очевидны. Все ее дальнейшие утверждения обосновываются путем логических рассуждений — доказательств. И решения геометрических задач обязательно включают доказательства того, что задача решена. То, что утверждается без доказательства, кроме аксиом,— это еще не геометрия, а отдельные сведения по геометрии.

Мы так и поступали — доказывали теоремы. Однако в наших доказательствах мы пользовались не только чисто логическими рассуждениями (для таких рассуждений нужны точные определения и четко сформулированные исходные положения), но и нередко опирались на очевидность.

Например, в аксиоме об откладывании угла говорится, что угол можно отложить от данного луча по одну или по другую сторону от него (рис. 171). Точного определения не было дано — мы полагались на очевидность

Другой пример. Определяя треугольник, мы говорили, что если три точки A, B, C не лежат на одном отрезке, то под треугольником ABC понимают фигуру, состоящую из трех отрезков AB, BC, CA и части плоскости, ограниченной этими отрезками. Определение того, что значит «ограничивают», не было дано. Это понятно из рисунка (рис. 172). Но как дать определение?

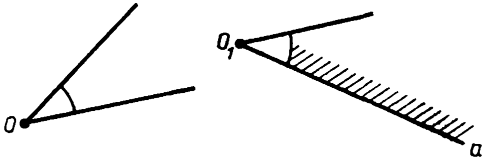


Рис 171

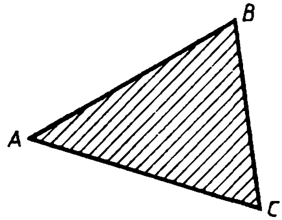


Рис. 172

Обычное определение состоит в том, что одно понятие разъясняется с помощью других, которые считаются известными. Допустим, эти известные понятия тоже можно определить через другие. Но так продолжать без конца невозможно. Мы придем к понятиям, определить которые через другие уже нельзя; их можно только пояснить, показать на примерах. Сами же эти понятия будут служить для определения других понятий. Они в этом смысле будут исходными, основными.

Итак, нужно выявить основные понятия изучаемой нами геометрии, а остальные определить через них.

Однако этого еще недостаточно. Доказывая какое-нибудь утверждение, теорему, мы опираемся на некоторые предпосылки, на то, что уже считается известным. Но и эти предпосылки тоже нужно обосновывать и т. д. Так продолжать бесконечно невозможно, и мы придем к предпосылкам, которые должны быть приняты за исходные. Эти исходные, основные положения — аксиомы — принимаются без доказательства и составляют основу для доказательства теорем. Мы сформулировали и приняли в начале курса ряд аксиом, прежде всего пять аксиом об основных построениях и некоторые другие. Но исчерпывают ли они все то, чем мы на самом деле пользовались в наших выводах?

Так, мы предполагали, что отрезок при его продолжении не пересекает сам себя, т. е., иначе говоря, если отрезок AB содержится в некотором другом отрезке AC, то он не имеет с отрезком BC общих точек, кроме их общего конца B (рис. 173). Все это ясно из рисунка, но для логических выводов нужны явные формулировки. Однако мы это нигде не формулировали. Мы предполагали еще, что данным отрезком e, принятым за масштаб, можно измерить любой другой отрезок (с заранее указанной точностью), откладывая на нем отрезки, равные e, или их доли ($\frac{e}{2}$, $\frac{e}{4}$, ...). Однако можно мыслить, что существуют столь большие отрезки, что сколько раз на таком отрезке ни откладывать отрезки, равные e, все будет оставаться остаток, больший e. Ясно, что такого быть не может. Но для логических выводов нужна явная формулировка и надо либо доказать, либо принять за аксиому, что такое невозможно. (Еще в древности греки поняли это и высказали такую аксиому, она называется аксиомой Архимеда: *для любых двух отрезков a и b найдется такое натуральное число n, что $na > b$.*)

Рис 173

Мы часто пользовались тем, что если прямая проходит через какую-нибудь точку внутри круга, то такая прямая пересекает его окружность в двух точках. Это очевидно (рис. 174). Однако почему нельзя было бы предположить: как раз там, где окружность должна пересечь прямую, нет никакой точки; там как бы дыра и окружность переходит с одной стороны от прямой на другую, не пересекая прямой? Это невозможно, говорим мы, потому что прямая сплошная, непрерывная: в ней нет дыр. Но это наше представление нужно явно и точно выразить, значит, нужна особая аксиома, «аксиома непрерывности», как ее и называют.

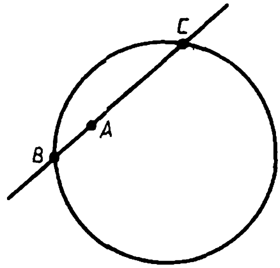


Рис. 174

Сделаем еще одно замечание. В самом начале курса, начиная разговор об отрезках, мы сказали: «У каждого отрезка два конца — те две точки, которые он соединяет». Но мы не подчеркнули это как особую аксиому. Однако при полном изложении и это утверждение нужно явно высказать как аксиому, отражающую одно из основных свойств отрезка.

Итак, задача состоит в том, чтобы выделить основные понятия, сформулировать как аксиомы все положения, которые принимаются без доказательств, а тем дать основу для действительно логического построения планиметрии: для определения других ее понятий и доказательства ее положений в качестве теорем. В этом смысле и говорят, что список основных понятий и формулировки аксиом составляют *основания планиметрии.*

Замечание. Принимать за основные можно разные понятия, так же как принимать за аксиомы можно разные утверждения планиметрии. Получаются разные ее основания. Но все они, если верно составлены, дают одни и те же результаты. Примеры таких различных построений планиметрии вы получите, если сравните, например, различные школьные учебники геометрии.

41.2. Основные понятия и определения

Основные понятия, которые выделяют при строгом построении геометрии, делятся на два вида: одни обозначают объекты, которыми занимается геометрия, другие обозначают отношения между этими объектами. Так, точка и отрезок — это объекты, а то, что точка принадлежит отрезку,— отношение между ними. (Точно так же скажем; стол и книга — объекты, а то, что книга лежит на столе,— отношение между ними. Разница здесь только в том, что точки и отрезки в геометрии — это мыслимые объекты, не реальные, а мыслимые образы реальных объектов, изображаемых, скажем, на рисунках.)

За основные объекты мы принимаем следующие: 1) **точки**; 2) **отрезки**; 3) **фигуры**. При этом точки и отрезки считаются частными видами фигур.

За основные отношения между этими объектами принимаются: 1) **точка принадлежит фигуре**, в частности отрезку; 2) **точка является концом отрезка**; 3) **два отрезка равны.**

То, что точка A принадлежит фигуре F, коротко записывают так: $A \in F$. Если точка принадлежит фигуре, то говорят также, что фигура содержит данную точку.

Отношение равенства отрезков — отрезки равны — служит основным понятием; оно не определяется. Наглядно оно поясняется наложением одного отрезка на другой, но это не определение. Если б мы сказали, что отрезки называются равными, если один можно наложить на другой, то надо было бы либо определить, что значит наложить, либо принять наложение за основное понятие.

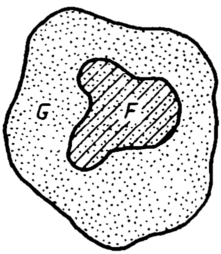


Рис. 175

Теперь напомним несколько известных определений, выражая их через основные понятия.

1. Говорят, что фигура F содержится в фигуре G, если все ее точки принадлежат G. Обозначается это так: $F \subset G$ (рис. 175).

2. Фигура F называется **объединением** некоторых данных фигур, если ей принадлежат все точки этих фигур, и никакие другие (рис. 176).

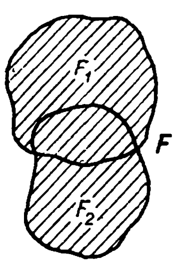


Рис. 176

3. **Прямой** AB называется фигура, являющаяся объединением всевозможных отрезков, содержащих точки A и B.

4. **Лучом** AB называется фигура, являющаяся объединением всевозможных отрезков с концом A, содержащих точку B.

5. **Полуплоскостью,** ограниченной пря-

мой a, называется фигура, обладающая следующими свойствами: 1) она содержит прямую a, но не совпадает с ней; 2) если точки A, B принадлежат полуплоскости, но не прямой a, то отрезок AB не имеет общих точек с a (рис. 177); 3) если же точка A принадлежит полуплоскости, а B нет, то отрезок AB имеет с прямой общую точку.

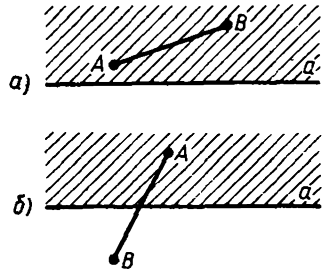


Рис. 177

После того как дано определение полуплоскости, понятия «с одной стороны от прямой» или «с разных сторон от прямой» определяются так: с одной стороны от прямой — значит в одной ограниченной ею полуплоскости; с разных сторон от прямой — значит не в одной полуплоскости, а в разных полуплоскостях, ограниченных этой прямой.

Определения ряда других понятий (в частности, что значит «одна фигура ограничивает другую фигуру») даются в дополнении к этому параграфу.

Замечание об определениях. Мы высказали сейчас несколько определений. Но от самих по себе определений не так много толку, если отвлечься от наглядных представлений (а мы сейчас должны от них отвлечься, чтобы быть уверенными, что наши выводы будут в самом деле логическими, основанными строго на определениях). Дело в том, что от того, что мы что-то определили, еще не следует, что это что-то существует. Например, можно дать определение: двуугольником называется фигура, ограниченная двумя отрезками. Формально это не хуже определения треугольника как части плоскости, ограниченной тремя отрезками. Однако такой фигуры — двуугольника — не бывает. (Точнее, такой фигуры нет в планиметрии, но на сфере такие фигуры есть — часть сферы, ограниченная двумя меридианами; рис. 178.)

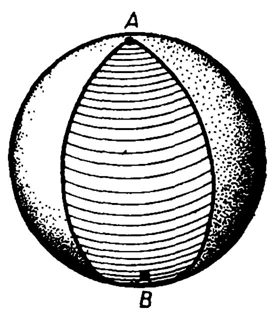


Рис. 178

Значит, определения имеют смысл не сами по себе, а в связи с утверждениями, устанавливающими, что то, чему дано определение, существует. И это должно либо утверждаться в аксиомах, либо должно быть доказано из аксиом. Поэтому прежде всего аксиомы должны говорить о существовании самих основных объектов и отношений между ними. Если таких аксиом нет, то все выводы могут оказаться ни к чему не относящимися — без аксиом существования они могут лишиться смысла.

41.3. Общее понятие об аксиоматике

Аксиоматикой называют перечень основных понятий и аксиом. Обычно говорят не перечень, а система аксиом, так как аксиомы связаны друг с другом и образуют в этом смысле известную систему.

Основные понятия — основные объекты и отношения — принятой нами аксиоматики планиметрии уже были названы в предыдущем пункте.

Аксиомы делятся на несколько групп. В первой группе формулируются аксиомы, касающиеся фигур вообще. В аксиомах этой группы участвуют только точки и фигуры и отношение принадлежности.

Аксиомы, в которых фигурируют отрезки, делятся на четыре группы. В первой из них не участвует понятие о равенстве отрезков. Эти аксиомы можно назвать аксиомами связи отрезков и точек. Таких аксиом шесть.

В следующей группе, напротив, основную роль играет понятие равенства отрезков. Эти аксиомы можно назвать аксиомами равенства отрезков. Таких аксиом четыре.

Далее идут аксиомы уже не просто об отрезках, а о фигурах на плоскости: о полуплоскостях, углах, прямоугольниках. Эти аксиомы можно назвать коротко аксиомами плоскости. Таких аксиом три.

Наконец, последнюю группу образует одна аксиома — аксиома непрерывности. Мы увидим, что она в самом деле занимает совсем особое положение.

41.4. Аксиомы связи отрезков и точек

Обратите внимание, что первыми формулируются аксиомы существования точек и отрезков.

1. *Существуют по крайней мере две точки.*

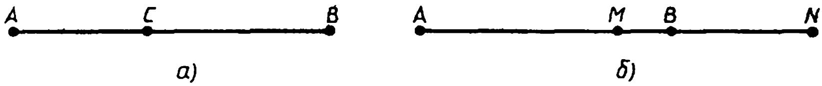


Рис 179

2. *Для каждых двух точек существует, и притом единственный, отрезок, концами которого являются данные точки.*

3. *Отрезок есть фигура. У каждого отрезка есть два и только два конца, а также существуют другие принадлежащие ему точки.* О точках отрезка, отличных от его концов, говорят, что они лежат **внутри** этого **отрезка.**

4. *Точка C, лежащая внутри отрезка AB, разбивает его на два отрезка AC и CB, т. е. AB есть объединение отрезков AC и CB и отрезки AC и CB имеют лишь одну общую точку — точку C* (рис. 179, *а*).

5. *Каждый отрезок можно продолжить за любой из его концов, т. е. для каждого отрезка AB существует содержащий его отрезок AC с концом C, отличным от B.*

6. *Два отрезка (AB и MN), имеющие две общие точки, образуют один отрезок, т. е. их объединение представляет собой один отрезок; его концами служат два из концов этих отрезков* (рис. 179, *б*).

Из перечисленных здесь шести аксиом мы раньше (в § 2) явно формулировали как аксиомы только три: аксиому 2 (аксиому о проведении отрезка) и аксиомы 5 и 6, которые вместе составляли одну аксиому — аксиому о продолжении отрезка.

По аксиоме 1 существуют по крайней мере две точки, а по аксиоме 2 две точки соединимы отрезком. Значит, и отрезки существуют, хотя бы один. Таким образом, основные объекты существуют и отношения «точка является концом отрезка» или просто «точка принадлежит отрезку» реализуются.

41.5. Аксиомы равенства отрезков

1. Аксиома сравнения. *Два отрезка, равные одному и тому же отрезку, равны друг другу.*

2. Аксиома откладывания отрезка. *На каждом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.*

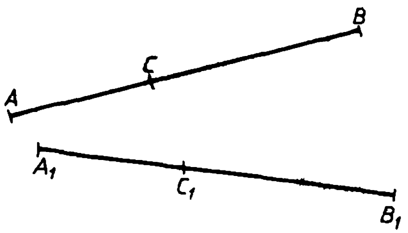


Рис 180

3. Аксиома сложения. *Если точка C лежит внутри отрезка AB, а точка C_1 лежит внутри отрезка A_1B_1 и выполняются равенства $AC = A_1C_1$ и $CB = C_1B_1$, то $AB = A_1B_1$* (рис. 180).

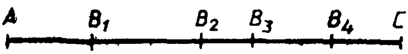


Рис 181

Если отрезок AC является объединением нескольких отрезков, не имеющих общих точек, кроме концов, то мы говорим, что отрезок слагается из этих отрезков (рис. 181).

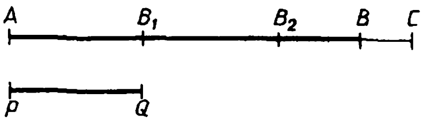


Рис 182

4. Аксиома Архимеда. *Для каждых двух отрезков AB и PQ существует отрезок AC, содержащий AB и слагающийся из отрезков, равных PQ ($AB_1 = B_1B_2 = B_2C = PQ$,* рис. 182).

Эта аксиома означает, что любой отрезок AB можно перекрыть данным отрезком PQ, откладывая его вдоль AB достаточное число раз. Эта аксиома новая для нас; первые три были высказаны еще в § 2 и 7.

41.6. Аксиомы плоскости и аксиома непрерывности

1. Аксиома полуплоскости. *Каждая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.*

Сказанное в этой аксиоме означает, что какую бы прямую a на плоскости мы ни взяли, всегда существуют ровно две полуплоскости, ограниченные этой прямой, которые в объединении дают всю плоскость, а их пересечением будет данная прямая a (рис. 183).

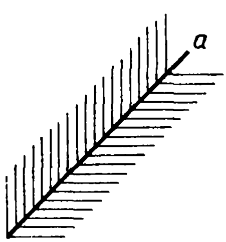


Рис 183

Следующая аксиома — об откладывании угла — была введена еще в § 3.

2. Аксиома откладывания угла. *По любым от-*

ложенным от вершины данного угла на его сторонах отрезкам и соединяющей их поперечине можно от заданного луча в каждую сторону отложить угол, равный данному, и притом только один (рис. 184).

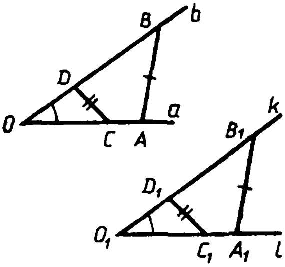


Рис 184

Подробнее эту аксиому можно изложить так.

Пусть даны угол O и луч l с вершиной O_1. Возьмем на сторонах угла O отрезки (произвольные) OA и OB. Тогда в любую сторону от луча l можно провести из точки O_1 такой луч k, что если на луче l отложить отрезок $O_1A_1 = OA$, а на луче k отложить отрезок $O_1B_1 = OB$, то окажется, что $A_1B_1 = AB$, т. е. существует угол $A_1O_1B_1$, равный углу AOB. Кроме того, в аксиоме утверждается, что если на сторонах угла O взять любые другие отрезки OC и OD, а затем по этим отрезкам и поперечине CD построить угол $C_1O_1D_1$, равный углу O и лежащий с той же стороны от l, что и угол $A_1O_1B_1$, то лучи O_1B_1 и O_1D_1 совпадут. Первое утверждение означает, что можно отложить угол, равный данному углу, а второе — что такой угол только один.

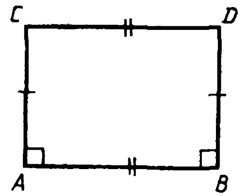


Рис 185

3. Аксиома прямоугольника. *Существует прямоугольник со сторонами, равными любым двум данным отрезкам.*

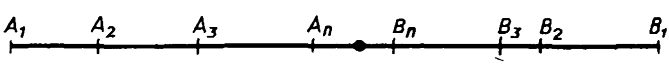
Это означает следующее: если из концов отрезка AB проведены в одну полуплоскость, ограниченную прямой AC, равные отрезки AC и BD, образующие с AB прямые углы, то отрезок CD равен AB и образует с CA и DB прямые углы (рис. 185)

Замечание. В этой аксиоме достаточно было бы потребовать, чтобы хотя бы один из углов C или D был прямой или чтобы выполнялось равенство $CD = AB$.

Наконец, сформулируем аксиому непрерывности.

4. Аксиома непрерывности. *Если дана последовательность отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, и отрезок A_1B_1 содержит*

Рис 186



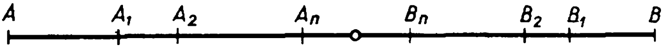


Рис 187

A_2B_2, *отрезок* A_2B_2 *содержит* A_3B_3 *и вообще отрезок* A_nB_n *содержит* $A_{n+1}B_{n+1}$, *то существует точка, принадлежащая всем этим отрезкам* (рис 186)

О последовательности отрезков, рассмотренных в этой аксиоме, говорят, что это последовательность вложенных отрезков Аксиома непрерывности выражает непрерывность прямых и отрезков в следующем смысле Представим себе сжимающуюся последовательность вложенных отрезков A_1B_1, A_2B_2, на отрезке AB Если нет точки, содержащейся в них всех, то в этом месте в отрезке AB разрыв, между его концами нет непрерывного перехода (рис 187) Аксиома утверждает, что такого на отрезках нигде нет

ДОПОЛНЕНИЯ К § 32

I. Сфера и шар

Вам хорошо известны предметы, имеющие форму шара (или его границы — сферы) детские и спортивные мячи, глобус, воздушные шары, шарики из подшипников и т п (рис 188) Сфера и шар — пространственные фигуры Определяются они в пространстве точно так же, как окружность и круг на плоскости

Окружность радиуса $R > 0$ с центром в точке O — это множество точек на плоскости, удаленных на расстояние R от точки O (рис 189)

Сфера радиуса $R > 0$ **с центром в точке** O — это множество точек в пространстве, удаленных на расстояние R от точки O (рис 190)

Круг радиуса $R > 0$ с центром в точке O — это множество точек на плоскости, удаленных от точки O на расстояние, не большее R (рис 191)

Шар радиуса $R > 0$ **с центром в точке** O — это множество точек в пространстве, удаленных от точки O на расстояние, не большее R (рис 192)

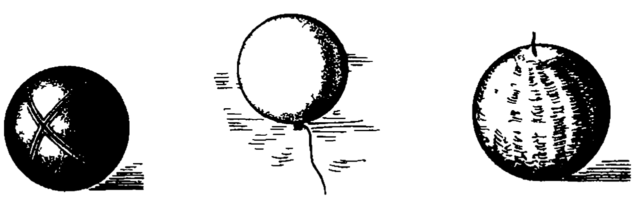


Рис 188

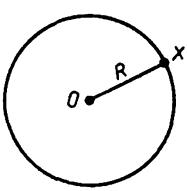


Рис 189

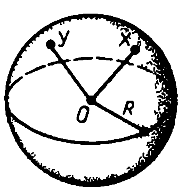


Рис 190

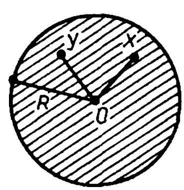


Рис 191

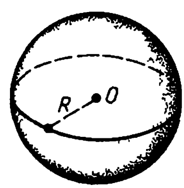


Рис 192

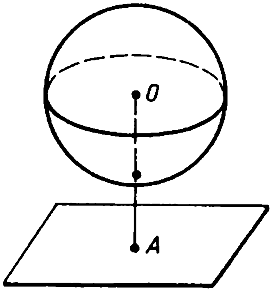


Рис 193

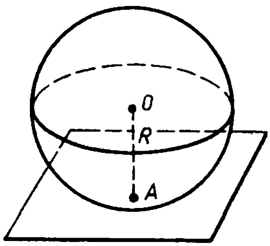


Рис 194

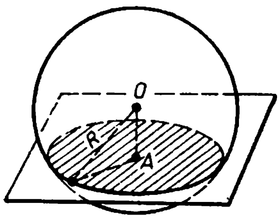


Рис 195

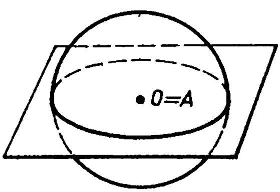


Рис 196

Границей круга радиуса R с центром O на плоскости является окружность того же радиуса и с тем же центром.

Аналогично границей шара радиуса R с центром O является сфера того же радиуса и с тем же центром.

Сфера и шар обладают многими интересными свойствами. Мы здесь рассмотрим пересечение шара и сферы с плоскостью.

Если расстояние от центра шара до данной плоскости больше радиуса шара, то плоскость не имеет с шаром общих точек (рис. 193).

Если расстояние от центра шара до плоскости равно радиусу шара, то плоскость имеет с шаром и ограничивающей его сферой только одну общую точку — **касается шара** (рис. 194). Радиус шара, проведенный в эту точку, перпендикулярен касательной плоскости (сравните с теоремой о касании прямой и окружности).

Наконец, если расстояние от центра шара до плоскости меньше радиуса шара, то пересечение шара с плоскостью представляет собой круг. Центр этого круга находится в основании перпендикуляра, опущенного из центра шара на плоскость (рис. 195), или в самом центре шара, если плоскость проходит через центр (рис. 196). Пересечение плоскости со сферой представляет собой окружность указанного круга.

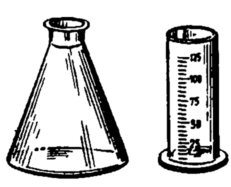


Рис 197

11. Конус и цилиндр

Можно назвать очень много предметов, имеющих форму цилиндра или конуса: трубы и колонны зданий, цистерны и стаканы, колбы и воронки и т. д (рис 197).

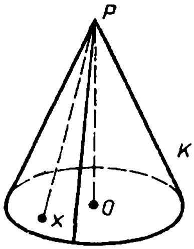


Рис 198

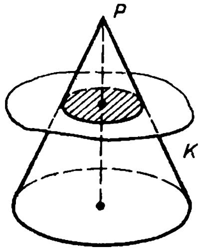


Рис 199

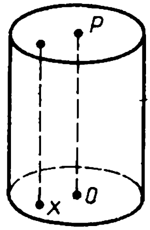


Рис 200

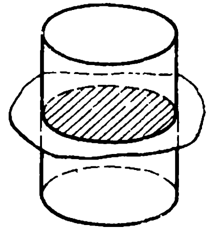


Рис 201

Конус (точнее, **конус вращения**) можно определить так. Пусть Q — круг с центром в точке O. Проведем из точки O какой-то отрезок OP, перпендикулярный плоскости круга Q. Соединим точку P отрезками PX со всеми точками $X \in Q$ (рис 198). Эти отрезки заполнят пространственную фигуру K, которая называется конусом. Круг Q называется **основанием конуса,** точка P — **вершиной конуса,** а отрезок OP — **осью конуса.**

Если конус K пересечь плоскостью, перпендикулярной оси конуса, то в сечении получится круг (рис. 199).

Цилиндр (точнее, **цилиндр вращения**) определяется так. Пусть Q — круг с центром O и OP — отрезок, перпендикулярный плоскости круга. На этот раз из всех точек $X \in Q$ проведем отрезки, равные отрезку OP, перпендикулярные плоскости круга Q и лежащие с той же стороны от плоскости круга, что и OP (рис. 200). Эти отрезки заполнят пространственную фигуру, называемую цилиндром. Обозначим его C. Круг Q называется **основанием цилиндра,** а отрезки, образующие цилиндр, называются его **образующими.** Концы этих отрезков, не лежащие в Q, заполнят еще один круг того же радиуса, что и Q. Этот круг тоже называется основанием цилиндра Отрезок OP называется **осью цилиндра.**

Любая плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его по кругу того же радиуса, что и основания цилиндра (рис 201).

III. Взаимное расположение двух окружностей

В основе всех построений циркулем и линейкой лежат построения точек пересечения прямой и окружности или двух окружностей До сих пор мы обычно считали очевидным возможность таких построений (например, при построении треугольников). В п 32.2 мы перечислили возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности, сравнивая расстояние от центра окружности до прямой и радиус окружности. Там мы установили, когда прямая и окружность имеют одну и когда две общие точки. Сейчас мы, применяя метод координат, решим аналогичную задачу о взаимном расположении двух окружностей. И эту задачу можно было бы решить чисто геометрически (попробуйте это сделать и сравните оба способа решения).

Итак, пусть окружность S радиуса r имеет центр в точке O, а другая окружность S_1 радиуса r_1 имеет центр в точке O_1 (рис. 202). Будем считать, что $r \geqslant r_1$. Ясно, что если $O = O_1$, то S и S_1 общих точек не имеют или совпадают (при $r = r_1$). Поэтому рассмотрим случай, когда $O \neq O_1$. Длину отрезка OO_1 обозначим d.

Введем систему координат с началом в точке O и осью x, идущей в направлении вектора $\overrightarrow{OO_1}$. Тогда окружность S задается уравнением

$$x^2+y^2=r^2, \qquad (1)$$

а окружность S_1 — уравнением

$$(x-d)^2+y^2=r_1^2. \qquad (2)$$

Поэтому координаты общих точек S и S_1 являются решениями системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2, \\ (x-d)^2+y^2=r_1^2, \end{cases} \qquad (3)$$

или, что равносильно, системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2, \\ 2dx=r^2-r_1^2+d^2. \end{cases} \qquad (4)$$

Решая эту систему, получим:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2d}(r^2-r_1^2+d^2), \\ y^2=r^2-\left(\frac{r^2-r_1^2+d^2}{2d}\right)^2. \end{cases} \qquad (5)$$

Применив формулу разности квадратов, получим:

$$y^2=\frac{(r+r_1+d)(r-r_1+d)(r+r_1-d)(d-(r-r_1))}{4d^2}. \qquad (6)$$

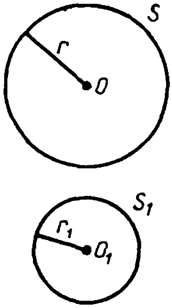


Рис. 202

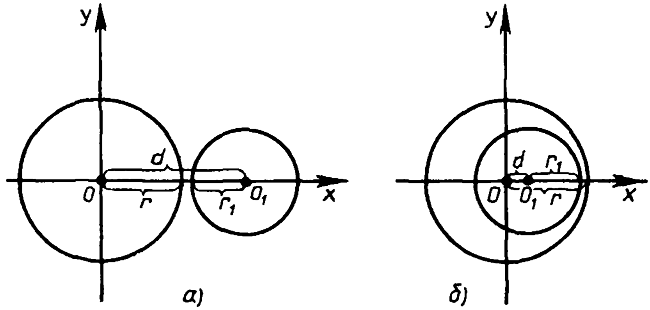


Рис. 203

Так как мы считаем, что $r \geqslant r_1$, то правая часть равенства (6) отрицательна при $d < r - r_1$ и при $d > r + r_1$ (рис. 203). В этих двух случаях система (3) не имеет решений, а окружности S и S_1 не имеют общих точек. Если $d < r - r_1$, то S_1 лежит внутри S, а если $d > r + r_1$, то S_1 лежит вне S.

Если $d = r + r_1$ (рис. 204, *а*) или $d = r - r_1$ (рис. 204, *б*), то получаем единственное решение: $y_0 = 0$. В этом случае S и S_1 имеют единственную общую точку — касаются. Их точка касания лежит на прямой, проходящей через центры окружностей,— линии центров. Если $d = r - r_1$, то S_1 лежит внутри S, а если $d = r + r_1$, то S_1 лежит вне S.

Наконец, если $r - r_1 < d < r_1 + r$, то система (3) имеет два решения, т. е. окружности S и S_1 пересекаются в двух точках, симметричных относительно линии центров (рис. 205).

Итак, мы рассмотрели все случаи взаимного расположения двух окружностей.

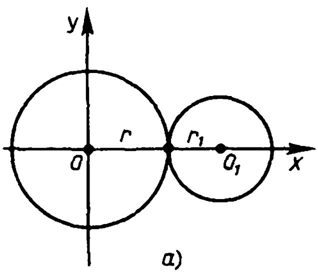


Рис. 204

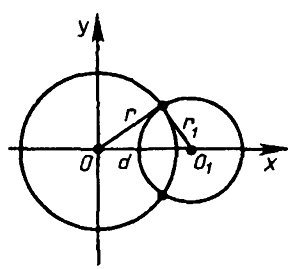


Рис 205

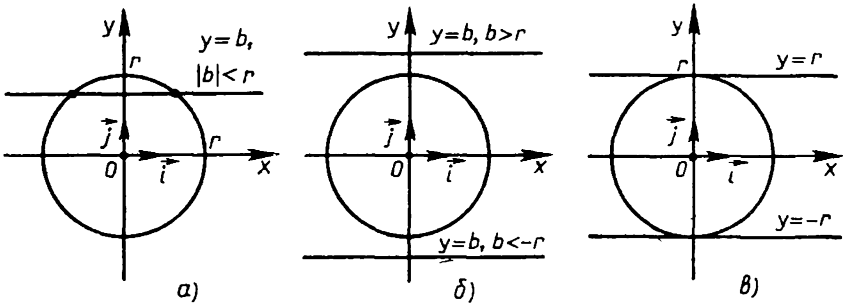


Рис 206

Замечание Исследование взаимного расположения прямой и окружности с аналитической точки зрения сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} y = b, \\ x^2+y^2 = r^2 \end{cases} \qquad (7)$$

(рис. 206). Проведите самостоятельно такое исследование.

ДОПОЛНЕНИЯ К § 33

1. Выражение радиуса окружности, описанной вокруг треугольника, через его элементы

Диаметр окружности, описанной вокруг треугольника, выражается формулой

$$2R = \frac{a}{\sin A}. \qquad (1)$$

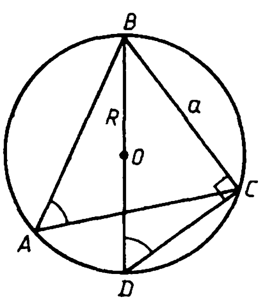


Рис 207

Доказательство. Проведем через центр O окружности, описанной вокруг треугольника ABC, диаметр BD (рис 207). Получим прямоугольный треугольник BCD с гипотенузой BD. Тогда

$$BD = \frac{BC}{\sin D} \qquad (2)$$

Но вписанные углы A и D опираются на одну и ту же дугу BC. Поэтому $\angle A = \angle D$ Так как $BD = 2R$ и $BC = a$, то из (2) следует (1), что и требовалось доказать.

Для радиуса R из формулы (1) получаем выражение

$$R = \frac{a}{2\sin A}. \qquad (3)$$

II. Выпуклые фигуры и выпуклые многоугольники

а) Выпуклые фигуры

Согласно определению, данному в п. 33.2, многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.

Вместе с тем в геометрии есть общее понятие выпуклой фигуры, которое определяется совсем иначе. Фигура называется **выпуклой,** если она вместе с любыми двумя своими точками содержит также соединяющий их отрезок (на рис. 208 фигура F выпуклая, а G невыпуклая).

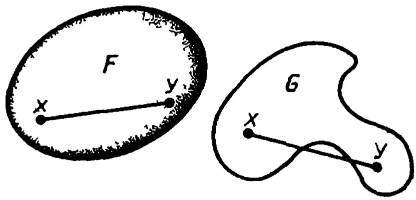


Рис 208

В первом определении выпуклость многоугольника характеризуется снаружи (рис. 209). Во втором определении выпуклость многоугольника характеризуется изнутри (рис. 210)

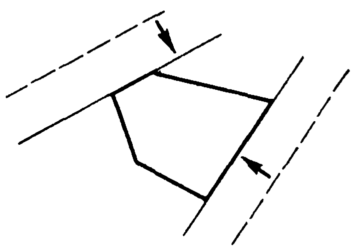


Рис 209

В соответствии с этими соображениями будем говорить о многоугольнике, что он **выпуклый снаружи,** если он выпуклый в смысле первого определения, и что он **выпуклый изнутри,** если он выпуклый в смысле второго определения.

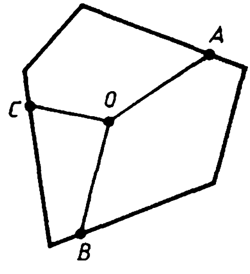


Рис 210

Оказывается, если фигура — многоугольник, то эти определения равносильны. При доказательстве равносильности этих двух определений выпуклости многоугольника будет использована следующая лемма.

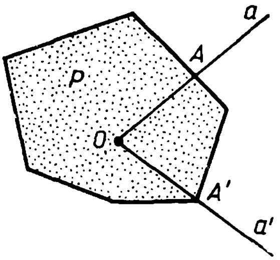


Рис. 211

Лемма. ***Каждый луч, проведенный из внутренней точки многоугольника, выпуклого снаружи, пересекает ограничивающую его ломаную в одной точке*** (рис. 211).

Доказательство. Пусть луч a исходит из точки O, лежащей внутри выпуклого снаружи многоугольника P. В какой-то точке A он пересекает ограничивающую его ломаную. Если точек пересечения много, то возьмем ближайшую к O точку (на самом деле точка пересечения одна, но это и надо доказать). Луч a либо пересекает в точке A какую-нибудь сторону многоугольника, либо точка A служит вершиной многоугольника и к ней подходит сторона, не лежащая на луче a (как для луча a' в точке A' на рис. 211).

В обоих случаях прямая, идущая вдоль стороны, пересекает луч a. Многоугольник лежит по одну сторону от нее, поэтому с той стороны, где не лежит точка O, вовсе нет точек многоугольника. Значит, луч a, пересекая границу многоугольника в точке A, больше нигде ее не пересекает, что и требовалось доказать.

б) Равносильность определений выпуклости многоугольника

Теорема. ***Два определения выпуклости многоугольника равносильны, т. е. если многоугольник выпуклый снаружи, то он выпуклый изнутри.*** И обратно: ***если многоугольник выпуклый изнутри, то он выпуклый снаружи.***

Теорема состоит из двух взаимно обратных утверждений. Докажем каждое из них.

Утверждение I. ***Если многоугольник выпуклый снаружи, то он выпуклый изнутри.***

Доказательство. Пусть данный многоугольник P выпуклый снаружи и A и B — какие-либо две его точки. Нужно доказать, что отрезок AB содержится в многоугольнике P. Этим и будет доказано, что он выпуклый изнутри.

Допустим, хотя бы одна из точек A, B (допустим A) лежит внутри многоугольника. Тогда по лемме луч AB, идущий из точки A через B, пересекает границу многоугольника только в одной какой-то точке C. Так что весь отрезок AC содержится в P и, кроме него, луч AB не имеет с P общих точек. Значит, и точка B принадлежит AC и отрезок AB содержится в AC, т. е. содержится в P, что и требовалось доказать.

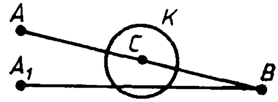


Рис. 212

Пусть теперь обе точки A, B лежат на границе многоугольника P. Допустим, что на отрезке AB есть точка C, не принадлежащая P. Вокруг нее можно описать круг K, не пересекающийся с P (рис. 212). Сколь угодно близко к точке A есть внутренние точки многоугольника P. Выберем одну из них A_1 так близко к A, чтобы отрезок A_1B пересекал круг K. Получается, что точки A_1, B принадлежат P и точка B внутренняя, но отрезок A_1B не содержится в P. Однако мы доказали, что если точка A внутренняя, то отрезок содержится в P. Получается противоречие. Оно доказывает, что на отрезке AB нет точек, не принадлежащих многоугольнику P. Значит, $AB \subset P$, что и требовалось доказать.

Утверждение II. ***Если многоугольник выпуклый изнутри, то он выпуклый снаружи.***

Доказательство. Пусть данный многоугольник P выпуклый изнутри, т. е. любые две его точки соединимы в нем прямолинейным отрезком. Нужно доказать, что многоугольник лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.

Допустим противное, т. е. допустим, что у многоугольника P есть такая сторона AB, что многоугольник имеет точки с обеих сторон от прямой AB. Пусть C, D — две такие точки. Тогда по выпуклости изнутри многоугольник должен содержать все отрезки CX, соединяющие точку C с точками X отрезка AB, т. е. он должен содержать треугольник ABC. Точно так же он должен содержать и треугольник ABD.

Оба треугольника лежат по разные стороны от прямой AB и, значит, образуют четырехугольник, содержащийся в многоугольнике P. Отрезок AB содержится в четырехугольнике. Следовательно, он никак не может быть стороной многоугольника.

Получилось противоречие, которое показывает, что предположение, будто у многоугольника есть точки по разные стороны от прямой, неверно. Значит, он лежит по одну сторону от прямой, содержащей его сторону, что и требовалось доказать.

в) Примеры выпуклых фигур

1. *Круг.* Пусть A, B — две точки данного круга K. Проведя отрезок AB и продолжив его, если нужно, до пересечения с

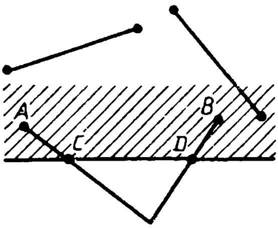


Рис 213

окружностью, получим хорду. Хорда содержится в круге (докажите это сами). Значит, отрезок AB содержится в круге, тем самым круг выпуклый.

2. *Плоскость, прямая, луч, отрезок.*

Одна точка и пустое множество также выпуклые фигуры. Формально они удовлетворяют определению. Они содержат все отрезки, соединяющие их точки, потому что таких отрезков нет. Это заключение может показаться странным, но оно логически точно.

3. *Полуплоскость* — это часть плоскости, ограниченная прямой (рис. 213). Прямая делит плоскость на две полуплоскости: одна с одной стороны от прямой, другая с другой. Если точки A, B лежат в одной полуплоскости, то отрезок AB содержится в ней. Иначе он должен был бы пересечь ограничивающую прямую дважды в каких-то точках C, D, переходя с одной стороны на другую и обратно. Получалось бы, что точки C, D соединяются двумя отрезками: один отрезок лежит на прямой, а другой — часть AB.

Но это невозможно, значит, полуплоскость выпуклая.

Прямая, ограничивающая полуплоскость, присоединяется к ней. В остальном полуплоскость — это множество точек, лежащих с одной стороны от ограничивающей прямой.

Поэтому, вместо того чтобы говорить о той или другой стороне от прямой, говорят о полуплоскости. Например: многоугольник выпуклый, если для любой его стороны он содержится в полуплоскости, ограниченной прямой, содержащей эту сторону.

Полуплоскости, как мы увидим, являются в некотором смысле самыми главными выпуклыми фигурами.

Мы сказали, что прямая делит плоскость на две полуплоскости, и так принято говорить, хотя это и неточно: ограничивающая прямая присоединяется к обеим полуплоскостям, так что они, строго говоря, не разделены полностью.

г) Пересечение выпуклых фигур

Напомним, что пересечением данных фигур называется фигура, которая содержит все точки, принадлежащие всем этим фигурам, и не содержит никаких других точек. Короче говоря, пересечение фигур — это множество их общих точек.

примерами выпуклых фигур могут служить части плоскости, ограниченные параболой, где $y \geqslant ax^2 (a > 0)$, и гиперболой, где

$$y \geqslant \frac{a}{x} (a > 0,\ x > 0).$$

Теорема. ***Пересечение любых двух выпуклых фигур есть выпуклая фигура, и вообще пересечение любой совокупности выпуклых фигур есть выпуклая фигура.***

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — две выпуклые фигуры и F — их пересечение (рис. 214). Если две точки A и B принадлежат F, то, значит, они принадлежат и F_1, и F_2. А так как фигура F_1 выпуклая, то она содержит отрезок AB. Точно так же F_2 содержит отрезок AB. Поэтому он содержится в пересечении F_1 и F_2, т. е. в F. Итак, отрезок, соединяющий любые две точки A, B фигуры F, содержится в F, т. е. фигура F выпуклая.

В случае пересечения любой совокупности фигур доказательство то же. Пусть фигура F является пересечением некоторых выпуклых фигур. Если точки A и B принадлежат F, то это значит, что они принадлежат всем фигурам данной совокупности. А тогда по выпуклости этих фигур отрезок AB содержится в каждой из них. Поэтому он содержится в общей части всех этих фигур — в их пересечении, т. е. в фигуре F. Таким образом, фигура F вместе с любыми двумя точками A, B содержит и соединяющий их отрезок. А это по определению означает, что фигура F выпукла, что и требовалось доказать.

Замечание. В частности, пересечение фигур может быть пустым или состоять из одной точки, т. е. фигуры могут вовсе не иметь общих точек или иметь только одну точку. Если бы пустое множество и одна точка не считались выпуклыми фигурами, то эти случаи надо было бы исключить из теоремы и ее нельзя было бы формулировать так просто, как это сделано

Доказанная теорема позволяет получить из известных выпуклых фигур новые, как пересечения известных, и, в частности, делить их на выпуклые части. Так из теоремы вытекает

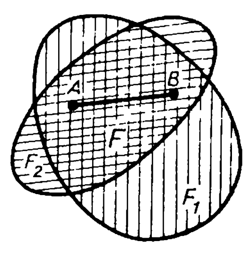


Рис 214

Следствие. ***Всякая прямая, пересекающая выпуклую фигуру во внутренних точках, делит ее на две выпуклые фигуры. В частности, прямая, пересекающая выпук-***

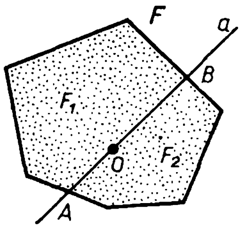


Рис. 215

лый многоугольник, делит его на два выпуклых многоугольника.

Доказательство. Пусть прямая a пересекает выпуклую фигуру F (рис. 215). Она делит плоскость на две полуплоскости. Пересечения их с фигурой F и дают две выпуклые фигуры, на которые прямая делит F. Если F — многоугольник, то полученные фигуры — выпуклые многоугольники.

Для многоугольников выполняется еще одна теорема. *Всякий выпуклый многоугольник является пересечением полуплоскостей, ограниченных прямыми, содержащими его стороны.* Обратно: *пересечение конечного числа полуплоскостей является выпуклым многоугольником, если только оно содержит внутренние точки и заключено в конечной части плоскости.*

Прямая делит плоскость на полуплоскости, как прямой разрез делит лист бумаги. Поэтому практически первая часть теоремы означает, что всякий выпуклый многоугольник можно вырезать прямыми разрезами вдоль его сторон (от края листа до края). Вторая часть означает, что прямыми разрезами вырезается выпуклый многоугольник.

Эту теорему вы можете доказать сами. Для первой части надо доказать, что если точка не принадлежит данному многоугольнику, то ее можно отделить от него прямой, содержащей его сторону («отделить» — это значит: точка и многоугольник лежат по разные стороны от такой прямой). Это можно вывести, например, из леммы на с. 146.

Круг является пересечением полуплоскостей, ограниченных его касательными (докажите).

Вообще в некотором смысле любая выпуклая фигура является пересечением полуплоскостей, ограниченных прямыми, касающимися фигуры.

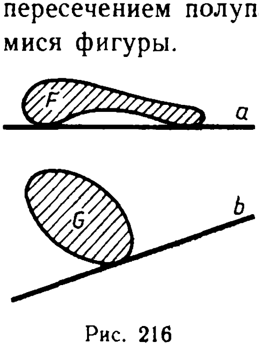


Рис. 216

д) Опорная прямая

Прямая называется **опорной** для данной фигуры, если она имеет с фигурой хотя бы одну общую точку, но вся фигура располагается по одну сторону от нее — в одной ограниченной ею полуплоскости. Фигуры

F, G (рис. 216) как бы опираются на прямые a, b, поэтому они и называются опорными.

Говорят: опорная прямая фигуры F в точке A, если прямая проходит через точку $A \in F$.

Каждая прямая, содержащая сторону выпуклого многоугольника, опорная; и мы можем сформулировать определение выпуклого многоугольника так: многоугольник выпуклый, если каждая прямая, содержащая его сторону, опорная для него.

Пример опорной прямой — это касательная к окружности. Она служит опорной прямой как к окружности, так и к ограниченному ею кругу (рис. 217).

Опорными к выпуклому многоугольнику будут не только прямые, содержащие его стороны, но и прямые, проходящие через его вершины (рис. 218).

Опорная прямая всегда проходит через точку на границе фигуры. Точка лежит на границе, если в любом круге вокруг нее есть точки, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей (рис. 219). Множество всех таких точек образует границу фигуры. Фигура может содержать свою границу, а может и не содержать, как, например, внутренность круга. Будем рассматривать выпуклые фигуры, содержащие свою границу (многоугольники, круги, полуплоскости).

Для них выполняются следующие теоремы:

1. Через каждую точку границы выпуклой фигуры проходит опорная прямая (можно сказать: всякая фигура, выпуклая изнутри, выпуклая и снаружи).

2. Если через каждую точку границы фигуры, имеющей внутренние точки, проходит опорная прямая, то фигура выпуклая.

3. Всякая выпуклая фигура, содержащая свою границу, является пересечением полуплоскостей, ограниченных опорными прямыми.

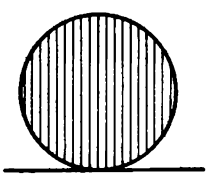


Рис. 217

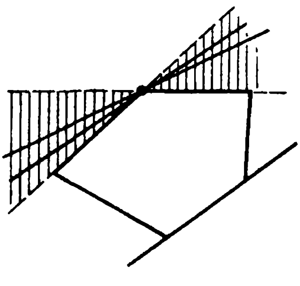


Рис. 218

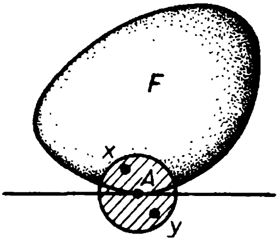


Рис. 219

ДОПОЛНЕНИЯ К § 37

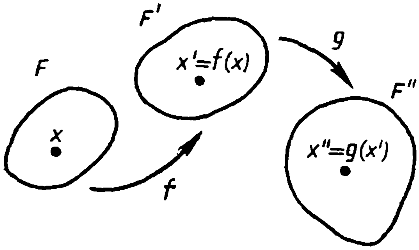


Рис 220

I. Композиция отображений[1]

Если фигура F отображается на F', а фигура F' затем отображается на F'', то в результате получается отображение фигуры F на фигуру F'' — композиция двух отображений (рис. 220). В этом случае, если точке X фигуры F сопоставлена точка X' фигуры F', а точке X' — точка X'' фигуры F'', то в итоге точке X сопоставляется точка X''. Например, мы изображаем фигуру — плоский предмет F в виде F', а потом делаем копию F'' фигуры F' — отображаем F' на F''. В результате фигура F отображается на F''.

Отображения обозначаются как функции: запись $X' = f(X)$ означает, что отображение f сопоставляет точке X точку X'. Так же пишут $F' = f(F)$ — отображение f отображает фигуру F на фигуру F'. Если происходит сначала отображение f, а затем отображение g, то пишут $X'' = g \circ f(X)$, т е. $X'' = g(X')$, где $X' = f(X)$. Соответственно пишут $F'' = g \circ f(F)$.

II. Обратное отображение

Пусть фигура F' получена из фигуры F отображением f, т. е. $F' = f(F)$ (рис. 221). Допустим, что при отображении f разные точки фигуры F переходят в разные точки фигуры F', т. е. если $X \neq Y$, то $f(X) \neq f(Y)$.

В этом случае можно определить **отображение фигуры F' на фигуру F, обратное отображению** f. Оно определяется так: если при данном отображении f точке X сопоставляется точ-

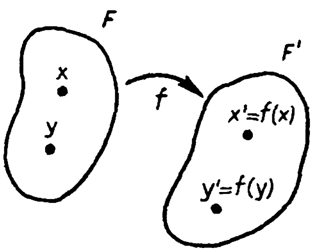


Рис. 221

[1] Как было сказано в п. 37.1, термины «преобразование» и «отображение» эквивалентны. В дополнениях мы в основном пользуемся термином «отображение», как более удобным для тех вопросов, которые здесь рассматриваются.

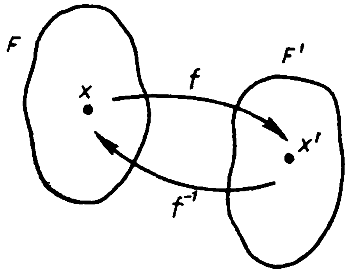


Рис. 222

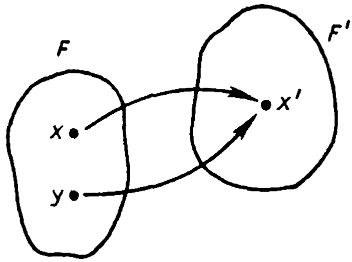


Рис. 223

ка X', то при обратном отображении точке X' сопоставляется точка X (рис. 222).

Допустим теперь, что при отображении f каким-то двум точкам X и Y сопоставляется одна и та же точка X' (рис. 223). Тогда отображения, обратного отображению f, определить нельзя, так как неизвестно, какую из точек X или Y сопоставить точке X'.

Обратное отображение подобно восстановлению оригинала по копии. Если в копии разные места оригинала слились, то обратное отображение оригинала делается неопределенным.

Отображение, для которого существует обратное, называют **обратимым**. Оно, как мы видим, характеризуется тем, что при нем разным точкам сопоставляются разные.

Пусть дано обратимое отображение f фигуры F на фигуру F'. Если произвести сначала отображение f фигуры F на фигуру F', а потом обратное отображение фигуры F' на F, то получится тождественное отображение фигуры F. Сначала точке X фигуры F сопоставляется некоторая точка X' фигуры F', а потом этой точке X' сопоставляется обратно точка X. В результате точка X сопоставляется сама себе, т. е. получается тождественное отображение фигуры F.

Отображение, обратное данному отображению f, обозначается f^{-1}. Так что если $X' = f(X)$, то $X = f^{-1}(X')$ и $f^{-1} \circ f(X) = X$.

Кроме того, очевидно, что обратное обратному отображению есть данное отображение, т. е. $(f^{-1})^{-1} = f$.

III. Композиция перемещений. Перемещение, обратное данному перемещению

Отметим два общих свойства перемещений, непосредственно вытекающих из определения.

Композиция двух перемещений есть перемещение.

Действительно, допустим, что, произведя перемещение фигуры F, мы отобразили ее на фигуру F', а потом произвели перемещение F' и отобразили ее на фигуру F'' В результате F отобразится на F''. При первом и втором перемещениях расстояния не изменялись. Значит, они и в итоге не изменились, т. е. получилось перемещение.

Перемещение обратимо, и отображение, обратное перемещению, есть перемещение.

Действительно, если двум точкам X, Y сопоставлены при перемещении точки X', Y', то расстояния сохраняются. Значит, если точки X, Y различны ($|XY| > 0$), то и X', Y' различны ($|X'Y'| = |XY| > 0$) Итак, при перемещении разным точкам сопоставляются разные. Значит, перемещение обратимо.

Если точкам X, Y при перемещении сопоставлены точки X', Y', то при обратном перемещении точкам X', Y' сопоставляются точки X, Y. Расстояния равны: $|XY| = |X'Y'|$. Следовательно, обратное отображение сохраняет расстояния, т. е. является перемещением

IV. Общие свойства равенства фигур

Равенство фигур обладает тремя общими свойствами.

1. *Каждая фигура равна самой себе:* $F \cong F$.

2. *Если фигура F' равна F, то и F равна F'*: если $F' \cong F$, то $F \cong F'$.

3. *Если фигура F' равна F, а F'' равна F', то F'' равна F:* если $F' \cong F$ и $F'' \cong F'$, то $F'' \cong F$.

Первое свойство называется **рефлексивностью,** второе — **симметричностью,** третье — **транзитивностью.** Соответственно можно сказать: *равенство фигур рефлексивно, симметрично и транзитивно.* Докажем это.

1. По определению $F' \cong F$, если существует перемещение, отображающее F на F'. В частности, каждая фигура отображается на себя тождественным отображением, которое, очевидно, является перемещением, так как сохраняет расстояния. Значит, каждая фигура равна сама себе.

2. Если $F' \cong F$, т. е. F отображается на F' некоторым перемещением, то F' отображается на F обратным перемещением. Значит, $F \cong F'$.

3. Пусть $F' \cong F$ и $F'' \cong F$. Это значит, что есть перемещение,

отображающее F на F', и перемещение, отображающее F' на F''. Результирующее отображение F на F'' является перемещением, и, значит, $F'' \cong F$.

Если использовать симметричность, то последнее свойство можно выразить так: две фигуры, равные третьей, равны друг другу (если $F' \cong F$ и $F'' \cong F$, то $F' \cong F''$).

Как видно из доказательства трех свойств равенства, эти свойства связаны со свойствами перемещений: рефлексивность с тем, что тождественное отображение является перемещением; симметричность с тем, что отображение, обратное перемещению, есть перемещение; транзитивность с тем, что два последовательных перемещения дают в результате перемещение.

ДОПОЛНЕНИЯ К § 38

1. Основная теорема о перемещении на плоскости

Как уже говорилось, любое перемещение фигуры на плоскости является одним из следующих перемещений: переносом, поворотом, осевой симметрией или скользящей симметрией. В этом и состоит основная теорема о перемещении фигуры на плоскости. До того как ее доказать, мы докажем еще две важные теоремы о перемещениях.

Теорема *(о задании перемещения)*. ***Любое перемещение однозначно определяется тремя парами соответствующих точек, не лежащих на одной прямой.***

Подробнее это означает следующее. Во-первых, выполняется утверждение единственности: пусть имеются два перемещения f и g одной фигуры F, которые трем точкам A, B, C, не лежащим на одной прямой, сопоставляют три точки A', B', C', т. е. $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ и $g(A) = A'$, $g(B) = B'$, $g(C) = C'$. Тогда для любой точки X фигуры F

$$f(X) = g(X),$$

т. е. перемещения f и g совпадают.

Во-вторых, имеет место следующее утверждение существования: если выбрать три любые точки A, B, C фигуры F, не лежащие на одной прямой, и сопоставить им такие точки A', B', C', что

$$|AB| = |A'B'|, \ |AC| = |A'C'|, \ |BC| = |B'C'|,$$

то существует такое перемещение f фигуры F, что

$$f(A) = A', \ f(B) = B', \ f(C) = C'.$$

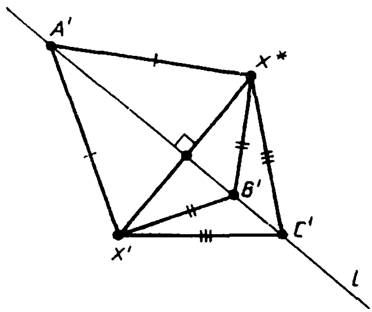


Рис 224

Сейчас мы докажем только утверждение единственности. А утверждение существования будет следовать из доказательства основной теоремы о перемещениях.

Доказательство утверждения единственности. Возьмем любую точку X фигуры F. Пусть $X' = f(X)$ и $X^* = g(X)$. Покажем, что точки X' и X^* совпадают. Допустим, что X' и X^* — различные точки. Так как f и g — перемещения, то $|A'X'| = |AX|$ и $|A'X^*| = |AX|$ Поэтому

$$|A'X'| = |A'X^*|, \qquad (1)$$

т е точка A' равноудалена от точек X' и X^*. Следовательно, точка A' лежит на серединном перпендикуляре отрезка $X'X^*$ — прямой l (рис. 224). Но точно так же можно доказать, что и точка B', и точка C' лежат на прямой l Итак, мы получили, что точки A', B', C' лежат на одной прямой — серединном перпендикуляре отрезка $X'X^*$. Это невозможно, так как перемещение f (а также и g) переводит три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, в точки A', B', C', также не лежащие на одной прямой. Это противоречие получилось из-за предположения, что $X' \neq X^*$. Итак, $X' = X^*$, т. е. перемещения f и g совпадают. Утверждение единственности доказано.

Вторая теорема позволяет распространить перемещение с заданной фигуры на всю плоскость.

Теорема *(о распространении перемещения)*. ***Пусть задано некоторое перемещение f плоской фигуры F. Тогда его можно распространить на всю плоскость.*** Подробнее: найдется такое перемещение g всей плоскости, которое совпадает с f на точках фигуры F, т. е. $f(X) = g(X)$ для любой точки X фигуры F.

Доказательство. Возьмем любые три точки A, B, O фигуры F, не лежащие на одной прямой. (Если таких точек нет, т. е. вся фигура F лежит на одной прямой, то возьмем две различные точки A и O фигуры F и любую точку B, не лежащую на прямой AO.) Пусть $O' = f(O)$, $A' = f(A)$ и $B' = f(B)$. (Если F лежит на прямой, то точку B' выберем так, чтобы треугольник

$O'A'B'$ был равен треугольнику OAB, т. е. чтобы выполнялись равенства (2).) Тогда выполняются равенства

$$|O'A'| = |OA|,\ |O'B'| = |OB|,\ |AB| = |A'B'|. \qquad (2)$$

Введем векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{a}_1 = \overrightarrow{O'A'}$, $\vec{b}_1 = \overrightarrow{O'B'}$

В силу равенства треугольников OAB и $O'A'B'$ имеем равенства скалярных произведений

$$\overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{O'A'}^2,\ \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{O'B'}^2,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'A'}\cdot\overrightarrow{O'B'}, \qquad (3)$$

т. е.

$$\vec{a}^2 = \vec{a}_1^2,\ \vec{b}^2 = \vec{b}_1^2,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}_1\cdot\vec{b}_1. \qquad (4)$$

Пусть X — любая точка плоскости. Разложим **вектор** $\vec{v} = \overrightarrow{OX}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\overrightarrow{OX} = x\vec{a} + y\vec{b}. \qquad (5)$$

Определим вектор $\vec{v}_1$ равенством

$$\vec{v}_1 = x\vec{a}_1 + y\vec{b}_1. \qquad (6)$$

Отложим вектор $\vec{v}_1$ от точки O':

$$\overrightarrow{O'X'} = \vec{v}_1 \qquad (7)$$

Сопоставим точке X точку X' (рис. 225) Получим отображение g всей плоскости. Покажем, что g — перемещение.

Возьмем любые две точки X, Y и соответствующие им точки $X' = g(X)$ и $Y' = g(Y)$. Пусть

$$\overrightarrow{OX} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b},\ \overrightarrow{OY} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{O'X'} = x_1\vec{a}_1 + y_1\vec{b}_1,\ \overrightarrow{O'Y'} = x_2\vec{a}_1 + y_2\vec{b}_1$$

и

$$\overrightarrow{XY} = (x_2 - x_1)\vec{a} + (y_2 - y_1)\vec{b},$$
$$\overrightarrow{X'Y'} = (x_2 - x_1)\vec{a}_1 + (y_2 - y_1)\vec{b}_1.$$

Возведя эти равенства в скалярный квадрат, получим:

$$\overrightarrow{XY}^2 = (x_2 - x_1)^2\vec{a}^2 + (y_2 - y_1)^2\vec{b}^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\vec{a}\cdot\vec{b},$$

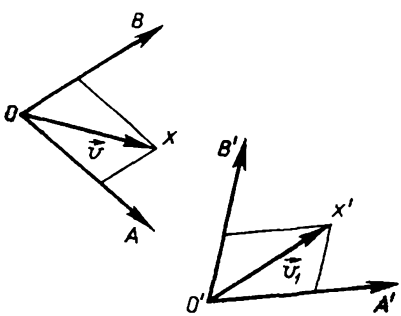


Рис 225

$$\overrightarrow{X'Y'} = (x_2 - x_1)^2\vec{a}_1^2 + (y_2 - y_1)^2\vec{b}_1^2 + \\ + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1. \qquad (8)$$

Ввиду равенств (4) соответствующие слагаемые в правых частях равенств (8) равны, т. е. $\overrightarrow{XY}^2 = \overrightarrow{X'Y'}^2$. Но $\overrightarrow{XY}^2 = |XY|^2$ и $\overrightarrow{X'Y'}^2 = |X'Y'|^2$. Поэтому $|XY| = |X'Y'|$, т. е. g — перемещение.

Ясно, что $g(O) = O'$, $g(A) = A'$ и $g(B) = B'$. Поэтому в силу доказанной теоремы единственности перемещения перемещение g совпадает с перемещением f на всех точках фигуры F, что и требовалось доказать.

Теперь докажем основную теорему о перемещении на плоскости. Ввиду доказанной теоремы о распространении перемещения основную теорему можно доказывать для случая, когда перемещаемая фигура — вся плоскость, так как в противном случае рассматриваемое перемещение можно распространить на всю плоскость.

Доказательство основной теоремы. Пусть f — заданное перемещение плоскости. Возьмем такую точку A, что точка $B = f(A)$ не совпадает с A. (Если $f(A) = A$ для всех точек A, то f — тождественное перемещение, которое можно считать и переносом на нулевой вектор, и поворотом на нулевой угол. Поэтому случай, когда f — тождественное перемещение, мы не рассматриваем.) Итак, пусть $B = f(A) \neq A$. Затем возьмем точку $C = f(B)$. Так как f переводит точки A и B в точки B и C, то

$$|AB| = |BC|. \qquad (9)$$

Для точек A, B, C возможны три случая их расположения:

1) A, B, C — вершины равнобедренного треугольника с основанием AC — общий случай (рис. 226).

2) Точки A, B, C лежат на одной прямой и точка B — середина отрезка AC (рис. 227).

3) Точка C совпадает с точкой A (рис. 228).

Возьмем какую-нибудь точку D, и пусть точка $D_1 = f(D)$. Точку D берем не на прямой AB. Тогда треугольник ABD равен тре-

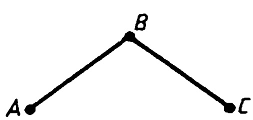


Рис 226

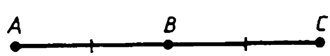


Рис 227

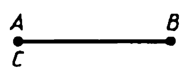


Рис. 228

угольнику BCD_1. Если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то возьмем точку D вне угла ABC и достаточно близко к середине отрезка AB, так чтобы треугольники ABD и BCD_1 не имели других общих точек, кроме вершины B, для обоих возможных случаев расположения треугольника BCD_1, указанных на рисунках 229, *а* и 229, *б*.

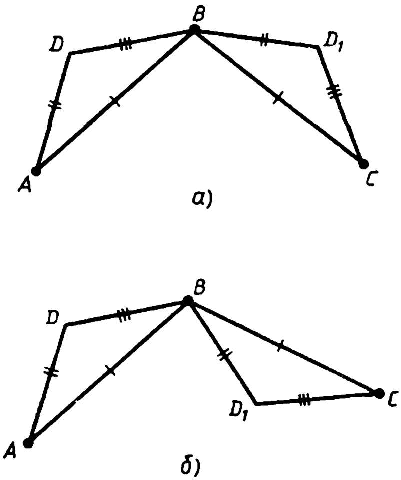


Рис. 229

а) Рассмотрим случай, соответствующий рисунку 229,*а*,— треугольник BCD_1 вне угла ABC. Пусть точки K и L — середины отрезков AB и BC. Проведем серединные перпендикуляры p и q отрезков AB и BC. Они пересекутся в точке O (рис. 230). Ясно, что поворот f_1 вокруг точки O на угол $\varphi = \angle KOL$ переводит треугольник ABD в треугольник BCD_1. По теореме единственности перемещения получаем, что $f = f_1$, т. е. в рассматриваемом случае f является поворотом.

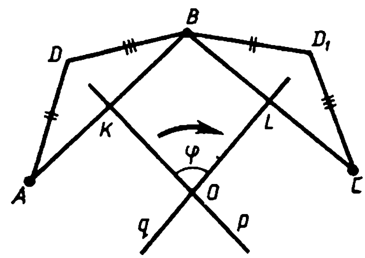


Рис. 230

б) Рассмотрим случай, соответствующий рисунку 229,*б*,— треугольник BCD_1 внутри угла ABC. В этом случае треугольник ABD можно сначала перевести в треугольник $A'B'D'$ переносом на вектор $\overrightarrow{KL}$ (рис. 231), а затем отражением в прямой KL треугольник $A'B'D'$ перевести в треугольник BCD_1. Следовательно, треугольник ABD переводится в треугольник BCD_1 скользящим отражением — ком-

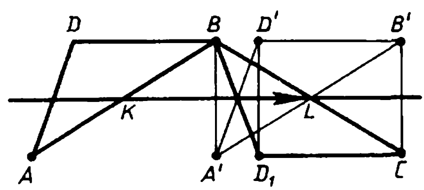


Рис. 231

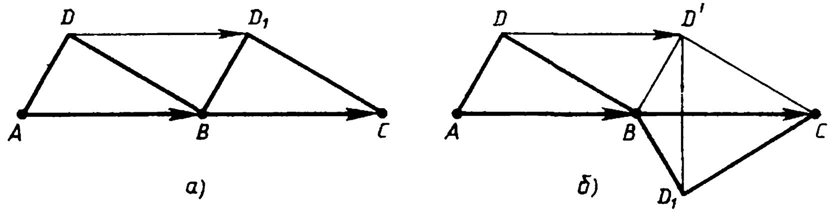


Рис 232

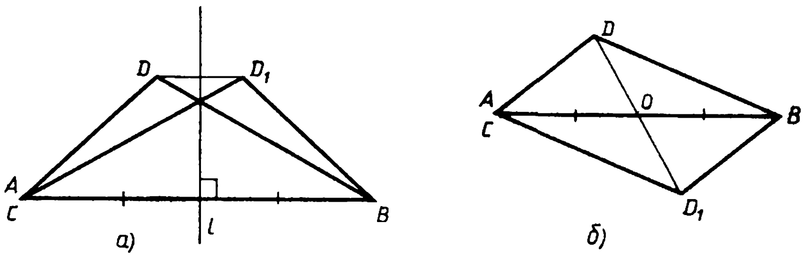


Рис 233

позицией переноса и отражения в прямой, параллельной направлению переноса. Снова, ссылаясь на теорему единственности, получаем, что f в этом случае является скользящим отражением.

Пусть точка B — середина отрезка AC Тогда снова есть две возможности для расположения треугольника BCD_1 — они указаны на рисунках 232,*а* и 232,*б* В первом из них, когда треугольники ABD и BCD_1 лежат с одной стороны от прямой AC, треугольник ABD переводится в треугольник BCD_1 переносом на вектор $\overrightarrow{AB}$. В этом случае f — перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$. Если же треугольники ABD и BCD_1 лежат по разные стороны от прямой AC, то треугольник ABD переводится в треугольник BCD_1 переносом на вектор $\overrightarrow{AB}$ в композиции с отражением в прямой AB, т. е. скользящим отражением. В этом случае f — скользящее отражение.

Наконец, если $A = C$, то снова возможны два случая расположения треугольников ABD и BCD_1: с одной стороны от прямой AB (рис. 233,*а*) и по разные стороны от прямой AB (рис. 233,*б*). В первом из этих случаев треугольник ABD переводится в треугольник BCD_1 симметрией относительно серединного перпендикуляра отрезка AB — прямой l. В этом случае f — симметрия относительно прямой l.

Во втором случае треугольники ABD и BCD_1 симметричны относительно середины отрезка AB — точки O. В этом случае l — симметрия относительно точки O, т. е. поворот на $180°$ вокруг точки O.

Мы рассмотрели все возможные случаи и полностью доказали основную теорему о перемещении плоскости.

II. Переносы и векторы

Перенос задается вектором. Если дан какой-либо вектор $\vec{a}$, то каждой точке X некоторой фигуры F можно сопоставить такую точку X', что $\overrightarrow{XX'} = \vec{a}$. Тогда все точки фигуры F перемещаются на один и тот же вектор, т. е. получаем перенос — перенос на вектор $\vec{a}$. Вектор $\vec{a}$ можно назвать **вектором** полученного **переноса.**

Композиции переносов соответствует сложение их векторов Результирующий перенос задается суммой векторов.

Действительно, произведем перенос точки X на вектор $\vec{a}$, а затем полученную точку X' перенесем на вектор $\vec{b}$ (рис. 234). Точке X сопоставляется точка X', а точке X' — точка X'' так, что

$$\overrightarrow{XX'} = \vec{a} \text{ и } \overrightarrow{X'X''} = \vec{b}.$$

Поэтому в результате точке X сопоставляется точка X'' так, что

$$\overrightarrow{XX''} = \overrightarrow{XX'} + \overrightarrow{X'X''} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Происходит перенос на сумму векторов.

Отображение, обратное переносу, есть перенос на противоположный вектор

В самом деле, произведя перенос на вектор $\vec{a}$, сопоставляем точкам X точки X' так, что $\overrightarrow{XX'} = \vec{a}$. При обратном отображении точкам X' сопоставляются точки X (рис. 235) и

$$\overrightarrow{X'X} = -\overrightarrow{XX'} = -\vec{a}.$$

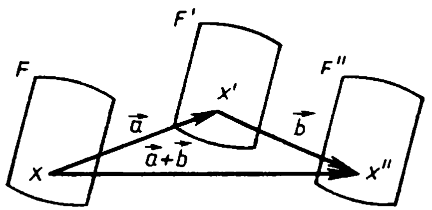


Рис. 234

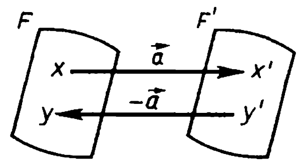


Рис. 235

Это и значит, что происходит перенос на вектор $-\vec{a}$.

Таким образом, *между переносами и векторами есть полное соответствие.* Каждому переносу отвечает вектор переноса, и каждому вектору — перенос на вектор. Композиции — последовательному совершению переносов — соответствует сложение векторов: результирующий перенос есть перенос на сумму векторов. Обратному переносу соответствует обратный вектор.

В этом, впрочем, нет ничего нового. Ведь мы определили вектор как перенос точки, сложение векторов как сложение переносов, обратный вектор как обратный перенос. Теперь мы только рассматриваем переносы не отдельных точек, а их множеств — переносы фигур. Фигура испытывает перенос, если все ее точки претерпевают одинаковые переносы — перенос на один и тот же вектор. Поэтому, естественно, сложение переносов и обращение переноса соответствуют сложению векторов и обращению вектора.

ДОПОЛНЕНИЯ К § 40

I. Подобие как композиция гомотетии и перемещения

Теорема. ***Каждое подобие есть композиция гомотетии и перемещения. При этом коэффициент гомотетии равен коэффициенту подобия.***

Доказательство. Пусть произведено подобное отображение фигуры F на фигуру F' с коэффициентом k. Тогда любым точкам X, Y фигуры F сопоставляются такие точки X', Y' фигуры F', что

$$|X'Y'| = k|XY|. \tag{1}$$

Подвергнем фигуру F гомотетии с тем же коэффициентом k. Центр гомотетии можно выбрать любой. Фигура F этой гомотетией отобразится на некоторую фигуру F_1, и все расстояния умножатся на k. Поэтому если точки X, Y фигуры F отображаются в точки X_1, Y_1 фигуры F_1, то

$$|X_1Y_1| = k|XY|. \tag{2}$$

Сопоставим точкам фигуры F_1 те точки из F', которые соответствуют тем же точкам из F. А именно точка X' фигуры F' сопоставляется точке X_1 фигуры F_1, если X' и X_1 соответствуют одной точке X из F. Такое соответствие сохраняет расстояния, так как из равенств (1) и (2) следует, что для соответственных точек X', Y' и X_1, Y_1

$$|X'Y'| = |X_1Y_1|. \qquad (3)$$

Это значит, что отображение F_1 на F' является перемещением.

Таким образом, мы представили подобное отображение фигуры F на F' как композицию гомотетии с тем же коэффициентом k, отображающей F на F_1, а затем перемещения F_1 на F'. Теорема доказана.

II. Композиция подобий

Теорема. ***Композиция подобий с коэффициентами k_1, k_2 есть подобие с коэффициентом k_1k_2. Подобие обратимо, и отображение, обратное подобию с коэффициентом k, есть подобие с коэффициентом $\frac{1}{k}$.***

Доказательство. Пусть фигура F отображается подобием с коэффициентом k_1 на фигуру F_1, а затем F_1 отображается подобием с коэффициентом k_2 на фигуру F_2 (рис. 236). Точкам X, Y фигуры F отвечают точки X_1, Y_1 фигуры F_1 так, что

$$|X_1Y_1| = k_1|XY|.$$

Точкам X_1, Y_1 отвечают точки X_2, Y_2 фигуры F_2 так, что

$$|X_2Y_2| = k_2|X_1Y_1|.$$

Тем самым точкам X, Y фигуры F отвечают точки X_2, Y_2 фигуры F_2 так, что

$$|X_2Y_2| = k_1k_2|XY|.$$

Итак, первое утверждение теоремы доказано. Докажем второе.

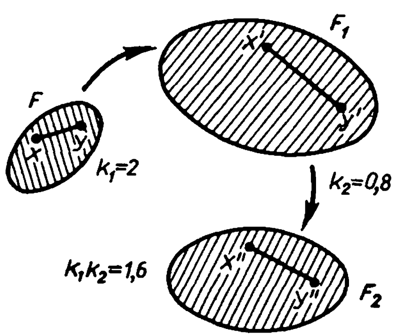


Рис. 236

Пусть фигура F отображается подобием с коэффициентом k на фигуру F'. Тогда для любых пар соответствующих точек X, Y фигуры F и X', Y' фигуры F' выполняется равенство

$$|X'Y'| = k|XY|. \qquad (4)$$

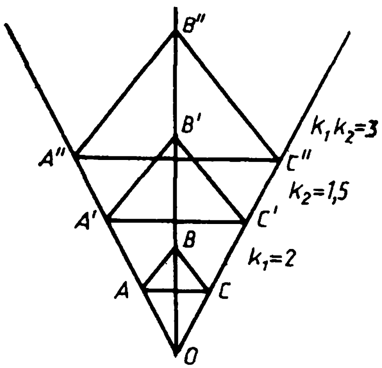


Рис 237

Если точки X и Y различны, то $|XY| > 0$. Так как $k > 0$, то из (4) следует, что $|X'Y'| > 0$, т. е. точки X' и Y' тоже различны. Поэтому подобие обратимо. При обратном отображении, когда точкам X', Y' сопоставляются точки X, Y, из (4) получим:

$$|XY| = \frac{1}{k}|X'Y'|.$$

Следовательно, обратное отображение будет подобием с коэффициентом $\frac{1}{k}$, что и требовалось доказать.

Отметим еще, что композиция двух гомотетий с общим центром и с коэффициентами k_1, k_2 будет гомотетией с тем же центром и с коэффициентом k_1k_2, так как, произведя одну гомотетию за другой, умножаем радиус-векторы сначала на k_1, а затем на k_2 (рис. 237).

III. Изменение площадей при подобии

Площадь $S(F)$ произвольной фигуры F заключена между площадями содержащих ее и содержащихся в ней многоугольных фигур: если

$$P \supset F \supset Q.$$

то

$$S(P) \geqslant S(F) \geqslant S(Q). \tag{5}$$

Для подобных им фигур также будет

$$P' \supset F' \supset Q'$$

и

$$S(P') \geqslant S(F') \geqslant S(Q'). \tag{6}$$

Умножим неравенство (5) на k^2. Получим:

$$k^2S(P) \geqslant k^2S(F) \geqslant k^2S(Q).$$

Но $k^2S(P) = S(P')$ и $k^2S(Q) = S(Q')$. Поэтому для многоугольных фигур P', содержащих F', и многоугольных фигур Q', содержащихся в F', получаем, что

$$S(P') \geqslant k^2S(F) \geqslant S(Q').$$

Это и означает, что $k^2S(F)$ является площадью фигуры F', т. е. $S(F') = k^2S(F)$. ■

IV. Подобие и равенство фигур как отношение эквивалентности

Подобие фигур обладает такими общими свойствами, как равенство фигур.

1. *Всякая фигура подобна сама себе* (**рефлексивность:** $F \sim F$).
2. *Если F' подобна F, то и F подобна F'* (**симметричность**).
3. *Если F' подобна F и F'' подобна F', то F'' подобна F* (**транзитивность**).

Доказательство такое же, как для равенства. По определению фигура F' подобна F, если существует подобное отображение F на F'. Тождественное отображение есть подобие, и, значит, фигура подобна сама себе.

Если есть подобное отображение F на F', то обратное отображение F' на F тоже подобие. Поэтому если F' подобна F, то F подобна F'.

Если F отображается подобно на F', а F' — на F'', то тем самым F отображается на F'', и, значит, F'' подобна F.

Такими же свойствами — рефлексивностью, симметричностью, транзитивностью — обладает равенство фигур. Ими же обладает и сонаправленность ненулевых векторов: всякий вектор сонаправлен сам с собой; если $\vec{a}$ сонаправлен с $\vec{b}$, то и $\vec{b}$ — с $\vec{a}$; если $\vec{a}$ сонаправлен с $\vec{b}$, а $\vec{b}$ — с $\vec{c}$, то $\vec{a}$ сонаправлен с $\vec{c}$.

Отношение, обладающее этими свойствами, называют **отношением эквивалентности** или **эквивалентностью.** Примером, кроме равенства фигур, подобия фигур и сонаправленности, может служить равночисленность совокупностей предметов. Очевидно, что отношение равночисленности обладает теми же тремя свойствами.

Если предметы сопоставляются по какому-либо свойству, то между ними обнаруживается отношение с теми же свойствами — эквивалентностью. Например, сравнение по цвету одноцветных предметов. Каждый предмет имеет свой цвет — одноцветен сам с собой; если предмет A одноцветен с B, то B одноцветен с A (имеет тот же цвет); если предмет A одноцветен с B, а B — с C, то A одноцветен с C.

Вообще отношение эквивалентности указывает на наличие некоторого общего свойства.

ДОПОЛНЕНИЯ К § 41

I. Определение фигуры, ограничивающей другую фигуру

Ломаной называется фигура, являющаяся объединением конечного числа отрезков, у которых последовательно есть по общему концу: у первого со вторым, другой конец второго общий с третьим и т. д. «Свободные» концы первого и последнего отрезка называются концами ломаной, и говорится, что она их соединяет (рис. 238). Если же эти концы первого и последнего отрезка совпадают, то говорят, что ломаная замкнута.

Пусть фигура F является объединением конечного числа отрезков, лучей и прямых (не исключено, что каких-либо из этих фигур в F нет). Будем говорить, что фигура F ограничивает фигуру G, если выполнены два условия: 1) среди точек, не принадлежащих F, есть точки, как принадлежащие G, так и не принадлежащие G; 2) всякая ломаная (или отрезок), соединяющая две такие точки, пересекает F. Подробнее: если один конец ломаной (или отрезка) принадлежит G, а другой не принадлежит и оба не принадлежат F, то ломаная содержит хотя бы одну точку из F (рис. 239).

Из этого определения ясно, что если фигура F ограничивает какую-то фигуру G, то она ограничивает также фигуру, которая содержит точки, не принадлежащие G. Например, три отрезка ограничивают треугольник и внешнюю для него область, два луча с общим началом ограничивают два угла и т. п. (рис. 240).

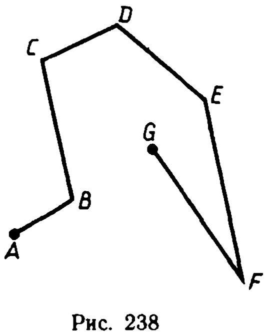


Рис. 238

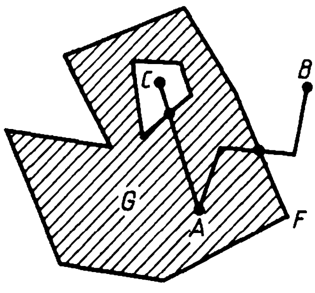


Рис. 239

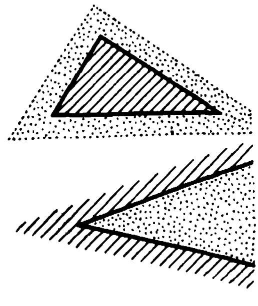


Рис. 240

II. Аксиомы фигур

1. *Фигура определяется принадлежащими ей точками,* т. е. если для фигур F_1 и F_2 при $A \in F_1$ также $A \in F_2$ и обратно: при $B \in F_2$ также $B \in F_1$, то фигуры F_1 и F_2 совпадают — это одна и та же фигура, только обозначенная двумя способами.

Например, фигура F_1 может быть получена одним построением, а F_2 — другим, но если окажется, что точки у них одни и те же, то это одна и та же фигура. Так, серединный перпендикуляр отрезка AB и фигура, состоящая из точек, равноудаленных от точек A и B,— это одна и та же фигура.

2. *Точка является фигурой;* ей принадлежит она сама и никакие другие точки.

Эта аксиома выражает в более точной форме то, что было сказано в самом начале нашего курса (в пункте 1 главы I): «Самая простая фигура — это точка» (у Евклида сказано: «Точка — это то, что не имеет частей»).

Из аксиомы 1 следует, что для того, чтобы определить или задать фигуру, достаточно указать, какие точки принадлежат фигуре, а какие не принадлежат. Это уточняет следующая аксиома.

3. *Если дано касающееся точек условие, проверяемое для любой точки, то существует фигура, которой принадлежат все точки, удовлетворяющие этому условию, и никакие другие.* При этом имеется в виду условие, которое выражается в основных понятиях или в понятиях, определяемых через основные, т. е. в конечном счете в основных понятиях.

Например, зададим условие: точка X лежит на данном расстоянии от данной точки O. В основных понятиях это выразится так: отрезок OX равен данному отрезку. Поэтому согласно аксиоме существует фигура, которой принадлежат все точки X, лежащие на данном расстоянии от данной точки, и никакие другие. Эта фигура нам хорошо известна — это окружность.

Из аксиомы 3 вытекают ее частные случаи.

3а. Если дан некоторый набор фигур F_1, F_2, ..., то существует фигура, являющаяся их **объединением.**

3б. Если дан некоторый набор фигур F_1, F_2, ..., то существует фигура, являющаяся их **пересечением.**

3в. Если дана фигура F, то существует фигура, являющаяся ее **дополнением,** т. е. такая фигура, которой принадлежат все точки, не принадлежащие F, и никакие другие.

Если фигура F задана, то известно, какие точки принадлежат ей, а какие нет. Поэтому условие, что точка не принадлежит фигуре, проверяемо, и, следовательно, фигура, определяемая этим условием, существует согласно аксиоме 3.

Точно так же если фигуры F_1, F_2, ..., о которых идет речь в утверждениях 3а, 3б, заданы, то известно, какие точки им принадлежат. Поэтому условия, которыми определяются объединение или пересечение фигур, проверяемы, и, значит, фигуры, являющиеся объединением или пересечением данных фигур, существуют согласно аксиоме 3.

Следствия 3а и 3б аксиомы 3 выражают то, что было сказано в самом начале курса (в пункте 1 главы I): «Объединение фигур тоже фигура... Общая часть этих фигур, или, как говорят, пересечение двух фигур, тоже фигура ..» Только там мы обращались к наглядному представлению, к рисункам, а теперь выражаем то же в более строгой отвлеченной форме. Объединение и пересечение фигур определены теперь через основное понятие принадлежности — «точка принадлежит фигуре».

Фигуру называют также **множеством точек.** Говорят еще, что фигура «состоит» из точек.

Пустым множеством называется множество, ничего не содержащее — никаких точек. Считается, что это тоже фигура — пустая. В аксиоме 3 фигуры F_1, F_2, ... могут не иметь общих точек, и тогда их пересечение оказывается пустым. Если бы не было понятия о пустой фигуре, то аксиому 3 пришлось бы формулировать с оговорками.

Вместо термина «множество точек» употребляют также термин «геометрическое место точек». Так и определяют: **геометрическим местом точек** с данным условием называется фигура, состоящая из всех точек, удовлетворяющих этому условию. Например, окружность — это геометрическое место точек, удаленных от данной точки на одно и то же данное расстояние.

Задачи к главе VI «Векторы и координаты»

1. Пусть векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ не являются параллельными. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{OX} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ Какую фигуру образуют все точки X, такие, что: а) $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$; б) $\alpha \leqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, в) $\alpha = 1$, $\beta \in R$; г) $\alpha \geqslant 0$, $\beta = -1$; д) $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$?

Какие ограничения нужно наложить на α и β, чтобы точки X образовали треугольник OAB?

2. Точки A, B, C, D расположены в пространстве произвольным образом. Докажите, что: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$;
б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Нарисуйте произвольный вектор $\overrightarrow{AX}$. Оказывается, его можно представить линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, т. е. в виде такой суммы: $\overrightarrow{AX} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}$. Попробуйте это объяснить.

3. Пусть точки A, B, C, D не лежат на одной прямой. Проверьте, что следующие два условия являются характерными для параллелограмма $ABCD$ а) выполнение равенства $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ для произвольной точки O; б) выполнение равенства $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$ для точки K пересечения его диагоналей.

4. Известно, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Как это доказать, используя векторы? Найдутся ли на сторонах четырехугольника другие четыре точки с таким же свойством?

5. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, точка K — середина BC, точка L — середина AD. а) Докажите, что $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD})$. б) Пусть теперь $ABCD$ — трапеция. Докажите, что $|\overrightarrow{KL}| = \frac{1}{2}(|BA| + |CD|)$. в) Проверьте утверждение, обратное б).

6. Построить треугольник, зная середины его сторон, несложно (как?). Попробуйте решить такую же задачу для пятиугольника. Сможете ли вы решить ее для четырехугольника? Попробуйте обобщить задачу.

7. Докажите, что каждая медиана треугольника меньше суммы двух других его медиан. Обобщите это.

8. На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы AA_1A_2B, BB_1B_2C, CC_1C_2A. Из отрезков A_2B_1, B_2C_1, C_2A_1 хотят составить треугольник. Возможно ли это? Существенно ли при этом, как расположены эти точки: на плоскости или в пространстве?

9. Центроид точек A_1, A_2, A_3, ..., A_n — это такая точка T, что $\overrightarrow{TA_1} + \overrightarrow{TA_2} + ... + \overrightarrow{TA_n} = \vec{0}$. Докажите, что при любом выборе точки O $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n})$. Единственна ли такая точка T?

10. Пусть есть две системы точек A_1, A_2, ..., A_n и B_1, B_2, ..., B_k. Докажите, что центроид всех данных точек лежит на отрезке, соединяющем центроиды данных систем. В каком отношении он делит этот отрезок? Примените результат этой задачи к доказательству свойства медиан треугольника.

11. Пусть A, B, C, D — любые точки, а K, L, M, N — середины отрезков AB, BC, CD, DA. а) Докажите, что отрезки KM и LN пересекаются и в точке пересечения делятся пополам. б) Докажите, что эта же точка является серединой отрезка, соединяющего середины AC и BD. в) Рассмотрим отрезки, которые соединяют данные точки с центроидами треугольников, образованных оставшимися точками, например точку A с центроидом треугольника BCD. Докажите, что все такие отрезки пересекаются. В каком отношении они делятся точкой пересечения?

12. Пусть $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ — три единичных вектора плоскости. Докажите, что среди них существуют такие два, что: а) сумма их длин не меньше 1; б) сумма их длин не меньше $\frac{2}{3}$.

13. Самолет летит из A в B и обратно. Когда он совершит перелет быстрее: а) без ветра; б) при ветре, дующем все время от A к B; в) при ветре, дующем все время перпендикулярно AB; г) при ветре, дующем все время под некоторым острым углом к AB?

14. а) Если на туго натянутую нить надавить пальцем, то она лопнет. Почему? б) Буксир изо всех сил тянет баржу, а канат, их соединяющий, все равно провисает. Почему?

15. На сторонах треугольника ABC отложены единичные векторы $\overrightarrow{AA_1}$ на AB, $\overrightarrow{BB_1}$ на BC, $\overrightarrow{CC_1}$ на CA. Возведите в квадрат сумму $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$. Ясно, что ее квадрат неотрицателен. Получите соотношение между косинусами углов треугольника.

16. Пусть координаты вектора $\vec{a}\,(a_1, a_2)$. а) Докажите, что вектор $(ka_2, -ka_1)$, где k — любое число, отличное от 0, перпендикулярен вектору $\vec{a}$. б) Проверьте обратное. в) Запишите условие перпендикулярности двух единичных векторов, заданных своими координатами.

17. На векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построен параллелограмм. Пусть вектор $\vec{b}^{\perp}$ такой, что $\vec{b}\cdot\vec{b}^{\perp} = 0$, $|\vec{b}^{\perp}| = |\vec{b}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}^{\perp} > 0$. Докажите, что площадь параллелограмма равна $\vec{a}\cdot\vec{b}^{\perp}$. Докажите аналогично, что она же равна $\vec{a}^{\perp}\cdot\vec{b}$. Пусть $\vec{a}\,(a_1, a_2)$, $\vec{b}\,(b_1, b_2)$. Докажите, что площадь параллелограмма равна $|a_1b_2 - a_2b_1|$.

18. Рассмотрим систему $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$

Дайте ей два различных векторных истолкования. Затем дайте векторное истолкование исследованию такой системы, т. е. выяснению вопроса о том, имеет ли она решения и сколько.

19. Имеются две точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_0 + a, y_0 + b)$. В зависимости от знаков чисел a и b установите, какая из них находится выше; правее.

20. Известны координаты двух вершин квадрата. Сможете ли вы найти координаты двух других его вершин?

21. Известны координаты двух вершин равностороннего треугольника. Сможете ли вы найти координаты его третьей вершины?

22. Как вычислить площадь четырехугольника, зная координаты всех его вершин?

23. Известны координаты центра окружности и ее радиус. По ней движется точка K. Каковы ее координаты, когда радиус в точке K составляет с осью x угол φ?

24. Пусть $ABCD$ — прямоугольник, а точка X — любая точка внутри его. Докажите, что $|XA|^2 + |XC|^2 = |XB|^2 + |XD|^2$. Будет ли это верно, если точка X будет вне прямоугольника? А если она будет вне его плоскости?

25. Докажите неравенство треугольника, используя метод координат.

26. Пусть A и B — две данные точки. Какой фигурой является множество точек M, таких, что·

а) $|AM|^2 - |BM|^2 = c$ (c — постоянная);
б) $|AM|^2 - k^2|BM|^2 = c$ $(k \neq 1)$;
в) $|AM|^2 + k^2|BM|^2 = c$,
г) $a \cdot |AM|^2 + b \cdot |BM|^2 = c$?

Обобщите задачу г).

27. Пусть даны $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ Докажите, что уравнение $(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$ является уравнением (AB).

28. Даны две прямые с уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Докажите, что они: а) параллельны или совпадают, если $a_1b_2 = a_2b_1$, б) перпендикулярны, если $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

29. Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный прямой l, K — данная точка и A — точка на прямой l Расстояние от K до l равно $|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AK}|$. Докажите это.

30. Пусть прямая задана уравнением $ax + by + c = 0$. Докажите, что если вектор (a, b) единичный, то расстояние от начала координат до прямой равно $|c|$. От чего зависит знак c?

31. Пусть A и B — данные точки. Множество точек, равноудаленных от них, есть прямая. Используйте это соображение для вывода уравнений прямой.

Задачи к главе VII «Многоугольники и окружность»

1. Внутри круга взята точка X. По окружности этого круга движется точка A. При каком ее положении $|AX|$ достигает наибольшего и наименьшего значения?

2. Внутри круга взяты две точки A и B. а) Из какой точки окружности отрезок AB виден лучше всего? б) При каком положении точки C на окружности площадь треугольника ABC является наибольшей?

3. Две равные хорды пересекаются внутри данного круга. а) Докажите, что точкой пересечения они делятся на соответственно равные части. б) Пусть угол между ними прямой и длины их известны. Сможете ли вы найти: 1) расстояние от центра круга до общей точки этих хорд; 2) расстояние между концами хорд;

3) площадь четырехугольника, вершины которого являются концами хорд; 4) длины дуг, на которые разбилась окружность концами хорд; 5) площади частей круга, на которые он разбит этими хордами? ж) Сможете ли вы выполнить задания 1—5, если угол между хордами будет равен φ? А если хорды не будут равными?

4. Нарисуйте окружность с центром O и диаметром AB. Через точку C этой окружности проведена касательная, которая пересекает прямую AB в точке K. Проведите отрезки CA, CO, CB и CH — перпендикуляр на AB. На этом рисунке рассмотрите такие величины:

$$|CH|,\ |OH|,\ |AC|,\ |BC|,\ |BK|,\ |KC|,\ |BH|,\ |AH|,\ |KO|.$$

Выберите любые три из них. Сможете ли вы найти остальные? Приведите примеры. Выберите две из этих величин и попробуйте решить задачу.

5. Прямая a пересекает окружность в точках A_1 и A_2, прямая b — в точках B_1 и B_2 Прямые a и b пересекаются в точке C. Докажите, что $|CA_1| \cdot |CA_2| = |CB_1| \cdot |CB_2|$. Что происходит с этим равенством, если: а) точка A_1 стремится к B_1 (при постоянной C); б) точка A_1 стремится к A_2 (при постоянной C)?

6. Из точки A провели к данной окружности две касательные: AB и AC (B и C — точки касания). Пусть известен угол, под которым видна окружность из точки A, и расстояние от A до круга. Как вычислить: а) радиус круга; б) длины дуг между точками B и C; в) площади частей круга, на которые он делится хордой BC? На дуге BC, ближайшей к точке A, возьмем любую точку. Пусть известны ее расстояния до AB и AC. Сможете ли вы найти расстояние от нее до BC? Есть ли на этой дуге точка, равноудаленная от касательных и хорды BC?

7. К окружности радиуса R в концах одного диаметра A и B провели две касательные. К этой же окружности проведена еще одна касательная, которая пересекает первые две в точках C и D. В каких границах изменяется: а) $|CD|$; б) угол, под которым касательная CD видна из центра окружности; в) площадь четырехугольника $ABCD$?

8. Даны две концентрические окружности. Хорда AB большей окружности касается меньшей из них. Из точек A и B проведены к меньшей окружности касательные AC и BD, являющиеся хордами в бо́льшей окружности. Как, зная радиусы данных окружностей, вычислить $|CD|$?

9. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD угла C и в него вписана окружность. Она касается AB в точке K. Как, зная стороны треугольника, вычислить $|KD|$?

10. Восстановите равнобедренный треугольник по: а) двум вершинам и центру описанной окружности; б) двум вершинам и центру вписанной окружности.

11. а) Рассмотрим равнобедренный треугольник. Пусть R — радиус его описанного круга, а r — радиус его вписанного круга. В каких границах находится $R : r$? В частности, может ли $R : r = 2$? $R : r = 10$? б) Как вычислить элементы равнобедренного треугольника, зная R и r? в) Сможете ли вы построить равнобедренный треугольник, зная положение центров его вписанной и описанной окружностей? г) Пусть в равнобедренном треугольнике эти центры совпадают. Что из этого следует? д) А если отказаться от условия равнобедренности треугольника?

12. Рассмотрим пять точек треугольника: точку пересечения медиан, биссектрис, высот, центр описанной и вписанной окружности. Как известно, в равностороннем треугольнике все они совпадают. Возьмем обратную ситуацию: пусть две из них совпадают. Является ли в этом случае треугольник равносторонним?

13. В данный круг вписана трапеция. Известны ее большее основание и угол при нем. Как найти у нее: а) другие стороны; б) диагонали; в) площадь; г) длины дуг, заключенные между ее вершинами; д) площади частей круга, на которые он разбит сторонами трапеции? Составьте аналогичные задачи для равнобедренной трапеции, описанной около данного круга.

14. Для вписанного четырехугольника известна теорема Птолемея: «Произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон». Для частных видов четырехугольников получите следствия из этой теоремы. Попытайтесь ее доказать хотя бы для частных видов четырехугольников.

15. а) Всегда ли наибольший круг, умещающийся в данном многоугольнике, является его вписанным кругом? б) Всегда ли наименьший круг, содержащий данный многоугольник, является его описанным кругом? в) Пусть известны все элементы четырехугольника. Как вы будете искать радиус наибольшего круга, умещающегося в нем, и радиус наименьшего круга, содержащего его?

16. На отрезке AB выбирают точку X. Строят два круга с диаметрами AX и XB. В каких границах находится суммарная площадь этих кругов при движении точки X по отрезку AB?

17. Кусок проволоки сгибают так, что он все время является частью окружности. Рассмотрим сегмент, ограниченный им и хордой, соединяющей его концы. Можете ли вы установить, в каких границах находится его площадь?

18. а) Из всех равнобедренных треугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, у которого площадь наибольшая. б) Из всех треугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, у которого площадь наибольшая.

19. Из точки A к данной окружности проводят две касательные AB и AC. Прямая OA, где точка O — центр окружности, пересекает окружность в двух точках K и L (точка K — ближайшая к A). Может ли площадь фигуры $ABKC$ равняться площади: а) сектора $OBKC$; б) сектора $OBLC$; в) сегмента BKC; г) сегмента BLC; д) треугольника OBC; е) треугольника LBC; ж) фигуры $LBKC$? Решите аналогичные задачи для периметров этих фигур.

20. а) Предложите как можно больше способов для нахождения радиуса некоторого реального круга. б) А как убедиться, что перед вами круг?

Задачи к главе VIII «Перемещения»

1. На стороне угла O взяты две точки A и B так, что $AO = OB$. Из них проведены перпендикуляры на другие стороны угла. а) Докажите, что: 1) они равны; 2) они пересекаются на биссектрисе угла. б) Докажите то же, если из этих точек провели перпендикуляры к тем сторонам угла, на которых они лежат, до пересечения с другой стороной. в) На боковых сторонах равнобедренного треугольника взяты точки, равноудаленные от вершины. Из них проведены перпендикуляры к этим же сторонам, где они лежат, до пересечения с основанием (или его продолжением). Докажите, что эти перпендикуляры равны.

2. На биссектрисе угла взяли точку и провели окружность с центром в этой точке. Докажите, что: а) если она касается сторон угла, то хорда, соединяющая точки касания, перпендикулярна биссектрисе угла и делится ею пополам; б) если она пересекает стороны угла, то хорды, высекаемые сторонами угла в этом круге, равны.

3. Докажите, что: а) высота равнобедренного треугольника к основанию делит пополам любой отрезок, параллельный этому основанию; б) биссектриса угла делит пополам любой отрезок с концами на сторонах угла и перпендикулярный ей; в) отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, перпендикулярен их общей хорде и делит ее пополам; г) углы при основании равнобедренного треугольника равны; д) диагонали равнобедренной трапеции равны.

4. Докажите, что в одной окружности равные хорды: а) равноудалены от центра; б) видны из центра под равными углами; в) соединяют концы равных дуг; г) отсекают от круга равные сегменты. Проверьте обратное.

5. Центр окружности совпадает с центром правильного треугольника, а сама она пересекает его стороны. а) Докажите, что полученные при этом хорды будут равны. б) Обобщите это. в) Верно ли обратное к а)?

6. Нарисуйте равносторонний треугольник ABC. а) На сторонах AB, BC, CA взяты точки C_1, A_1, B_1 так, что $AC_1 = BA_1 = CB_1$. Вершинами какого по виду треугольника являются точки A_1, B_1, C_1? б) Пусть теперь проведены отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и точки K, L, M — точки пересечения этих отрезков. Вершинами какого треугольника являются точки K, L, M? в) Составьте аналогичную задачу для квадрата.

7. Даны две равные окружности. Через середину отрезка, соединяющего их центры, проведена прямая. Докажите, что если она касается одной окружности, то касается и другой; если она пересекает одну окружность, то пересекает и другую, причем полученные хорды равны. Проверьте обратное.

8. Два круга равны и имеют единственную общую точку. Докажите, что любая прямая, проходящая через нее и пересекающая круги, пересекает эти круги по равным хордам.

9. Докажите, что: а) любая хорда параллелограмма, проходящая через его центр, делится им пополам; б) точки A и B равноудалены от любой прямой, проходящей через середину AB.

10. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$ и $AD = DC$. Верно ли, что у него есть ось симметрии?

11. а) Через точку на диаметре окружности проведены две хорды, образующие с ним равные углы. Докажите, что они равны. б) Верно ли обратное?

12. Треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$). а) Возьмите на высоте из вершины B точку и проведите через нее отрезки AA_1 и CC_1 (A_1 — на стороне BC, C_1 — на AB). Докажите, что $BA_1 = BC_1$, $AA_1 = CC_1$. б) Пусть на сторонах BA и BC взяты точки K и L так, что $BK = BL$. Докажите, что точка пересечения CK и AL лежит на высоте треугольника из вершины B.

13. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$, $AD = DC$. На сторонах BA и BC отложены отрезки $BK = BL$, на сторонах DA и DC отложены отрезки $DN = DM$. Докажите, что $MK = LN$.

14. Фигура F_2 получилась из фигуры F_1 переносом. В результате некоторого перемещения F_2 перешла в F_2', а F_1 — в F_1'. Можно ли совместить переносом F_1' и F_2'? Проверьте аналогичное утверждение для того случая, когда F_2 получена из F_1 другим перемещением.

15. Нарисуйте две центрально-симметричные фигуры так, что их можно совместить переносом. Можно ли их совместить другим перемещением? Составьте сами аналогичные задачи.

16. Фигура имеет: а) центр симметрии; б) ось симметрии. Докажите, что ее образ, полученный в результате любого перемещения, будет обладать тем же свойством. Обобщите эти утверждения.

17. а) Пусть фигура имеет две параллельные оси симметрии. Докажите, что у нее есть еще ось симметрии. б) Пусть фигура имеет две пересекающиеся оси симметрии. Имеет ли она еще одну ось симметрии?

18. Докажите, что композиция двух поворотов с одним центром является поворотом.

19. Даны две прямые a и b. Докажите, что: а) $S_b \circ S_a = T$, где T — перенос, если $a \parallel b$; б) $S_b \circ S_a$ — поворот, если a пересекает b.

20. При каком условии $S_a \circ S_b = S_b \circ S_a$?

21. Нарисуйте вектор $\vec{a}$. Нарисуйте вектор, полученный из него: а) переносом; б) центральной симметрией; в) поворотом; г) отражением от прямой; д) скользящей симметрией.

22. Нарисуйте вектор $\vec{a}$ и вектор $\lambda\vec{a}$($\lambda \neq 0$). Что произойдет с вектором $\lambda\vec{a}$, если вектор $\vec{a}$: а) перенести на некоторый вектор; б) повернуть; в) отразить от прямой?

23. Нарисуйте два вектора и их сумму. Что произойдет с этой суммой, если каждый из слагаемых векторов: а) перенести на один и тот же вектор; б) повернуть на 180°; в) повернуть на угол, меньший развернутого; г) отразить от прямой?

24. Нарисуйте два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и какую-либо их линейную комбинацию $x\vec{a} + y\vec{b}$. Что с ней произойдет, если каждый из данных векторов: а) перенести на один и тот же вектор; б) повернуть; в) отразить от прямой?

25. Разделите пополам угол с недоступной вершиной.

26. Две прямые a и b пересекаются в недоступной точке. Через точку A, не лежащую на данных прямых, проведите прямую, которая проходила бы через точку пересечения данных прямых.

27. Объясните, почему в любом перемещении круга: а) его центр переходит в центр; б) точка на окружности переходит в точку на окружности; в) диаметр переходит в диаметр; г) дуга переходит в дугу.

28. В результате некоторого перемещения у фигуры оказались неподвижные точки. Будут ли у нее еще неподвижные точки, если таких неподвижных точек оказалось: а) одна; б) две; в) три, причем они не лежат на одной прямой?

29. Рассмотрим перемещения всей плоскости. Какую фигуру образуют все ее неподвижные точки в каждом из конкретных перемещений?

30. Рассмотрим перемещения плоскости. Какие из них сохраняют ориентацию треугольника и какие меняют ее? (Ориентация треугольника — это порядок обхода его вершин.)

31. Рассмотрим перемещения всей плоскости. Возьмите каждое из них и посмотрите, какого вида будет обратное к нему.

32. Пусть точка A имеет координаты (x, y). Какие координаты имеет точка, полученная из A: а) переносом на вектор $\vec{a}\,(p, q)$; б) центральной симметрией относительно O; в) центральной симметрией относительно $B(a, b)$; г) поворотом вокруг O на $90°$; д) симметрией относительно оси Ox; е) симметрией относительно прямой $y = b$; ж) симметрией относительно прямой $y = kx + l$?

33. Нарисуйте правильный многоугольник. Его центр отразите от каждой из его сторон. Докажите, что полученные при этом точки являются вершинами правильного многоугольника. Предложите другие способы получения правильных многоугольников, используя перемещения.

34. Один треугольник получен из другого переносом. Может ли он быть получен из данного: а) центральной симметрией; б) поворотом; в) отражением в прямой?

35. Каким перемещением можно совместить: а) два равных отрезка с общим концом; б) два равных равносторонних треугольника с общей вершиной; в) два равных квадрата с общим центром; г) два равных равнобедренных треугольника с общей стороной?

36. Стороны треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно равны и параллельны сторонам треугольника ABC. Проведите прямые AA_1, BB_1, CC_1. Каково их взаимное расположение?

Дополнительные задачи к § 29

1. а) Треугольник ABC равносторонний со стороной 1. Возьмем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$. Чему равна проекция каждого из них на ось, проходящую через другой? б) Решите такую же задачу для равнобедренного треугольника с основанием 2 и углом при вершине 120°. в) Решите такую же задачу для равнобедренного треугольника с боковой стороной 1 и углом при основании φ. г) Решите такую же задачу для треугольника со сторонами 4, 5, 6.

2. Систему координат повернули вокруг O на 45° против часовой стрелки. Новое положение вектора $\vec{i}$ обозначим как $\vec{i_1}$, а новое положение вектора $\vec{j}$ обозначим как $\vec{j_1}$. а) Каковы координаты векторов $\vec{i_1}$ и $\vec{j_1}$ в старой системе координат? б) Каковы координаты векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в новой системе координат? в) Попытайтесь решить задачу в общем случае, когда угол поворота равен φ.

3. Пусть дан вектор $\vec{a}(x, y)$. Каковы координаты вектора $\vec{b}$, полученного из данного: а) симметрией относительно оси x; б) симметрией относительно оси y; в) симметрией относительно 0; г) поворотом вокруг 0 на угол 90° против часовой стрелки; д) поворотом на угол φ вокруг 0 против часовой стрелки?

4. Пусть известны координаты вершин треугольника ABC. а) Как найти координаты векторов, заданных его медианами, биссектрисами? б) Каковы координаты точки T, такой, что $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$? Обобщите задачу.

5. Известны координаты четырех точек. Как проверить, являются ли они вершинами: а) параллелограмма; б) ромба; в) прямоугольника; г) квадрата; д) равнобедренной трапеции? Приведите численные примеры. Как узнать, лежат ли они на одной окружности?

6. Из начала координат выходит вектор $\vec{a_1}$ единичной длины, который образует с вектором $\vec{i}$ угол $\varphi < 90°$. Каковы координаты $\vec{a_1}$? Из конца вектора $\vec{a_1}$ выходит вектор $\vec{a_2}$ единичной длины, который образует с вектором $\vec{a_1}$ угол φ. Каковы координаты вектора $\vec{a_2}$?

Дополнительные задачи к § 30

1. Нарисуйте вектор a. Как найти такой вектор $\vec{b}$, что $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$?

2. Пусть A, B, C, D — любые точки плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$. Будет это верно для точек, не лежащих в одной плоскости?

3. Используя скалярное умножение, докажите, что высоты треугольника или их продолжения имеют общую точку.

4. Попытайтесь установить связь между длинами диагоналей трапеции и длинами ее сторон наподобие той, которая имеет место для параллелограмма. Из нее как частный случай заново получите связь между диагоналями и сторонами параллелограмма.

5. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр с ребром 1. Вычислите:

а) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$; б) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB}$, в) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}$;

г) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{KL}$, где K — середина PA, L — середина BC;

д) $\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{MN}$, где M — середина PB, N — середина AC.

6. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 1. Вычислите:

а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C_1D_1}$; б) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{CD_1}$;

г) $\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{D_1C}$; д) $\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{DB_1}$; е) $\overrightarrow{D_1B}\cdot\overrightarrow{A_1C}$.

7. а) Выражение $ab + cd$ истолкуйте как скалярное произведение двух векторов. б) Пусть при этом $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$. Как теперь выглядит это истолкование? в) Докажите, что

$$|ab + cd| \leqslant \sqrt{a^2 + c^2}\cdot\sqrt{b^2 + d^2}$$

Дополнительные задачи к § 31

1. Две прямые заданы своими уравнениями. Как найти угол между ними? Приведите примеры.

2. Даны точки $A(-2, 1)$, $B(1, 3)$ и $C(2, -2)$. Напишите уравнение: а) стороны AC треугольника ABC; б) медианы, выходящей из вершины A; в) биссектрисы, выходящей из вершины C; г) высоты, опущенной из вершины B. Определите вид треугольника ABC (по сторонам и углам).

Вычислите длину: е) медианы из A; ж) биссектрисы из C; з) высоты из B

3. Прямая задана уравнением $ax + by + c = 0$. Напишите уравнение прямой, параллельной данной и проходящей через точку (x_0, y_0). Приведите примеры.

4. а) Прямая задана уравнением $ax + by + c = 0$. Дана точка $A(x_0, y_0)$. Требуется узнать, в какой полуплоскости, ограниченной этой прямой, лежит данная точка. Как это сделать? Приведите примеры.

б) Две прямые, заданные своими уравнениями, пересекаются. Дана точка $A(x_0, y_0)$. Требуется узнать, в каком из углов, образованных этими прямыми, находится точка A. Как это сделать? Приведите примеры.

5. Каким уравнением можно задать: а) точку (0; 0); б) точку (—5; 7); в) крест из двух перпендикулярных прямых; г) две параллельные прямые; д) две точки; е) границу квадрата; ж) границу треугольника?

6. Какой фигурой является множество точек K, таких, что:

а) $|KA|^2 - |KB|^2 = 1$, где A и B — данные точки;

б) $|KA|^2 + |KB|^2 = 1$, где A и B — данные точки?

7. Концы отрезка скользят по сторонам прямого угла. По какой линии движется его середина?

8. Вершины острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC движутся по осям координат. По какой линии движется вершина прямого угла?

Дополнительные задачи к § 32

1. В окружности радиуса R через одну ее точку проведены две хорды, образующие между собой угол φ, длины хорд d_1 и d_2. а) Установите зависимость между этими величинами. б) Какой будет эта зависимость при $d_1 = d_2$? при $\varphi = 90°$? в) Как найти одну из этих величин, зная остальные? Приведите примеры.

2. В круге радиуса R через точку внутри него проведены две взаимно перпендикулярные равные хорды длиной d. а) Найдите расстояние от центра круга до точки пересечения хорд. б) Найдите расстояние между концами этих хорд. в) Сможете ли вы решить задачу б), если длины хорд будут d_1 и d_2? г) Сможете ли вы решить задачу, если длины хорд будут d, а угол между ними будет φ? д) Сможете ли вы решить задачу в самом общем случае?

3. Две окружности радиусами R_1 и R_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. а) Докажите, что $AB \perp O_1O_2$. б) Докажите, что AB делится прямой O_1O_2 пополам. в) В каком случае O_1O_2 делится прямой AB пополам? г) Установите связь между R_1, R_2, $|O_1O_2|$, $|AB|$. Как она выглядит при $R_1 = R_2$? д) Как выразить одну из этих величин через другие? Приведите численные примеры. е) Выразите длину отрезка AB. Как изменяется эта величина при изменении каждой из других? ж) Составьте сами задачу, исходя из данной фигуры.

4. Две окружности касаются в точке B. В одной из них проведены две хорды BA и BC. Они (или их продолжения) пересекают вторую окружность в точках A_1 и C_1 соответственно. а) Пусть $BA = BC$. Докажите, что $BA_1 = BC_1$ и наоборот. б) Установите вид четырехугольника AA_1C_1C. в) Найдите отношение $|AC| : |A_1C_1|$, если радиусы окружностей известны.

5. Нарисуйте два круга, не имеющие общих точек. Пусть их центры O_1 и O_2. а) Пусть A_1B_1 и A_2B_2 — общие внешние касательные к данным окружностям (т. е. отрезки A_1B_1 и A_2B_2 не пересекаются). Докажите, что: 1) они равны; 2) их продолжения пересекаются на (O_1O_2). б) Пусть C_1D_1 и C_2D_2 — общие внутренние касательные к данным окружностям (т. е. отрезки C_1D_1 и C_2D_2 пересекаются). Докажите про эти отрезки то же, что и в пункте а). в) Может ли внешняя касательная равняться внутренней? г) Каким по виду является четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$? $C_1C_2D_2D_1$?

6. Два круга не имеют общих точек. Пусть известны их радиусы и расстояние между этими кругами. Как найти: а) длину внешней касательной; б) длину внутренней касательной; в) угол между внешними касательными; г) угол между внутренними касательными? Выберите сами числовые данные и получите результат.

7. Две окружности радиусов R_1 и R_2 касаются извне в точке C. К ним проведены две общие внешние касательные A_1B_1 и A_2B_2. Чему равна: а) величина угла A_1CB_1; б) площадь треугольника A_1CB_1; в) угол между прямыми A_1B_1 и A_2B_2; г) расстояние от точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 до ближайшей к ней данной окружности; д) площадь четырехугольника $A_1B_1B_2A_2$; е) длина отрезка касательной, проведенной к обеим окружностям через точку C, между прямыми A_1B_1 и A_2B_2. Как будут изменяться эти величины при неограниченном уменьшении R_2?

8. Как найти радиус основания круглой башни, не подходя к ней?

Дополнительные задачи к § 33

1. Рассмотрим формулу $R = \frac{a}{2\sin A}$, где a — сторона треугольника, A — угол против нее. а) Выразите a. б) Выразите $\sin A$. в) Пусть радиус постоянен, а $\angle A$ увеличивается. Как изменяется a? Сделайте рисунок. г) Какая зависимость между a и R при постоянном $\angle A$? д) Какая зависимость между R и $\sin A$ при постоянном a? Пусть $\angle A$ увеличивается. Как изменяется R? е) В каких границах лежит отношение $\frac{a}{R}$?

2. Докажите, что радиус описанной около треугольника окружности находится по формуле $R = \frac{abc}{4S}$, где a, b, c — длины сторон, а S — площадь треугольника. Выразите отсюда S.

3. Как найти радиус окружности, описанной около треугольника, если известны: а) две стороны и угол между ними; б) сторона и два прилегающих угла; в) три медианы? Выберите числовые данные и получите результат.

4. Как определить свое местонахождение кораблю, если с него видно: а) два ориентира на Земле; б) три ориентира на Земле?

5. Докажите, что можно описать окружность вокруг: а) прямоугольника; б) равнобедренной трапеции. Проверьте утверждения, обратные данным.

6. Как вычислить радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции, в ней известны: а) все стороны; б) два основания и диагональ; в) большее основание, боковая сторона и угол между ними; г) большее основание и угол, под которым оно видно из вершины другого основания; д) диагональ и угол, под которым она видна из противоположной вершины. Приведите численные примеры.

7. В круг радиуса R вписываются прямоугольники. Чему равна наибольшая из их площадей?

8. Докажите, что можно вписать окружность в: а) квадрат; б) ромб.

9. Около окружности описана равнобедренная трапеция. Докажите, что: а) прямая, соединяющая точки касания окружности с основаниями, перпендикулярна этим основаниям; б) прямая, соединяющая точки касания окружности с боками, параллельна основаниям. Вершинами какого по виду четырехугольника могут быть эти четыре точки касания?

Дополнительные задачи к § 34

1. Если из вершины правильного многоугольника провести все диагонали, то они разобьют угол при этой вершине. Докажите, что углы, полученные при таком разбиении, равны.

2. Пусть точка O — центр правильного многоугольника $A_1A_2...A_n$. а) Докажите, что для любой точки X верно равенство $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XA_2} + ... + \overrightarrow{XA_n})$. б) Докажите, что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

3. Пусть вам известны координаты двух вершин правильного n-угольника. Сможете ли вы найти координаты остальных его вершин? его центра? Приведите примеры.

4. Стороны правильного пятиугольника продолжали до взаимного пересечения. При этом получилась пятиконечная звезда — многоугольник со многими интересными свойствами. а) Докажите, что равны ее стороны и углы. б) Вычислите ее острый угол. в) Вычислите ее сторону при стороне пятиугольника, равной 1. г) Как еще можно ее получить из правильного пятиугольника?

5. Опишем практический способ получения правильного пятиугольника. Возьмите длинную полоску бумаги и аккуратно завяжите ее узлом. Вы увидете правильный пятиугольник. Попробуйте это доказать.

6. Пусть $A_1A_2...A_n$ — правильный многоугольник. Возьмем точку P, не лежащую в его плоскости, и соединим ее отрезками со всеми его точками. Пусть при этом отрезки PA_1, PA_2, ..., PA_n равны между собой. Мы получили многогранник, который называется правильной пирамидой. а) Сколько вершин, ребер и граней в правильной пирамиде? б) Докажите, что ее боковые грани (т. е. все, кроме правильного многоугольника, который называется основанием) равны между собой. в) Пусть точка O — центр правильного многоугольника. Докажите, что все треугольники POA_i равны между собой. г) Оказывается, что PO перпендикулярен любой диагонали правильного многоугольника, проходящей через O. Попробуйте это доказать.

Дополнительные задачи § 35

1. Имеется кольцо, образованное концентрическими окружностями с длинами L_1 и L_2. Какова длина наибольшего отрезка, умещающегося в кольце?

2. По окружности радиуса R катится окружность радиуса $\frac{1}{2}R$. Сколько оборотов она сделает, пока вернется в прежнее положение? (Рассмотрите два случая.)

3. Попробуйте объяснить, почему хорда короче дуги окружности, соединяющей ее концы. Может ли она быть в два раза короче, чем меньшая из этих дуг?

4. На окружности радиуса 1 выбираются 2, 3, ..., n точек, делящих ее на равные по длине части. С центрами в этих точках проводятся вне данного круга дуги равных окружностей так, чтобы получились розетки из проведенных дуг. Найдите длину границы розетки.

5. Нарисуйте квадрат со стороной 1. С центром в каждой его вершине проведите внутри него дугу окружности радиусом, равным стороне квадрата. У вас получится фигура, ограниченная четырьмя дугами этих окружностей. Вычислите длину границы этой фигуры. Составьте сами похожие задачи.

6. Даны две окружности радиусами R и r $(R > r)$. Центр меньшей окружности лежит на большей. Длина дуги меньшей окружности внутри большего круга равна L. Какова длина дуги большей окружности внутри меньшего круга?

7. Автомобиль едет по дуге окружности. а) Объясните, почему его внешние колеса едут с большей скоростью, чем внутренние. б) Установите, как зависит отношение их скоростей от крутизны поворота.

8. Прямоугольное поле стадиона окружено беговой дорожкой. Она состоит из двух прямолинейных участков и двух полуколец. Длина беговой дорожки должна быть 400 м. а) Рассчитайте размеры прямоугольного поля и ширину дорожки. б) Бегуны бегут 400 м. Как вы их расставите на старте? (Бегунов четверо, и каждый из них бежит по своей дорожке.)

Дополнительные задачи к § 36

1. Дан круг радиуса $R = 1$. Его требуется накрыть равными кругами, меньшими данного. Каким должен быть их радиус, если этих кругов: а) два; б) три; в) четыре; г) пять?

2. Кольцо образовано окружностями с радиусами R и $R + \triangle R$. Чему равно отношение площади кольца к $\triangle R$? Пусть $\triangle R$ становится все меньше. Как изменяется это отношение?

3. Пусть S — площадь кольца, d — его ширина, L — длина окружности, равноудаленной от его краев. Какая связь между этими величинами? Что она напоминает?

4. Круг данного радиуса надо разбить концентрическими окружностями на десять фигур равной площади. Как вы это сделаете?

5. Известны радиусы R и r двух окружностей и расстояние между их центрами. Как вы найдете площадь и длину границы их пересечения, их объединения? Удалите из полученного объединения кругов их пересечение и найдите разность площадей оставшихся частей. Можно ли обобщить полученный результат?

6. Расположите на столе три одинаковые монеты так, чтобы каждая касалась двух других. а) Какую часть составляет от площади одной монеты площадь фигуры, находящейся между ними? б) Обобщите эту задачу. в) Вернитесь к исходной ситуации. Рассмотрим наименьший круг, содержащий данные монеты. Какую часть от его площади составляет площадь всех монет? г) Обобщите эту задачу. д) Вернитесь к исходной ситуации. Какую часть составляет площадь наибольшего круга, который умещается в фигуре, описанной в пункте а), по отношению к площади этой фигуры? е) Обобщите задачу.

7. Можно ли рассечь круг двумя параллельными хордами на три равновеликие части? Сделайте расчет для круга радиуса 1. Обобщите задачу.

8. Дан круг. Можно ли разделить его на равновеликие непересекающиеся части: а) двумя линиями равной длины; б) тремя линиями равной длины; в) четырьмя линиями равной длины?

Дополнительные задачи к § 37

1. Объясните, почему в результате перемещения: а) окружность переходит в окружность; б) круг — в круг; в) прямая переходит в прямую; г) луч переходит в луч; д) полуплоскость — в полуплоскость; е) угол переходит в угол; ж) сохраняется параллельность прямых; з) параллелограмм переходит в параллелограмм; и) квадрат — в квадрат; к) правильный многоугольник — в правильный многоугольник.

2. Треугольник $A_1B_1C_1$ получен из треугольника ABC неким перемещением. Возьмите какую-либо замечательную точку треугольника ABC, например центр масс. В какую точку треугольника $A_1B_1C_1$ она переходит при этом перемещении? Разберитесь и с другими замечательными точками.

3. Является ли перемещением такое преобразование плоскости,

которое каждой точке (x, y) ставит в соответствие точку с координатами: а) $(x; 0)$; б) $(0; y)$; в) $(2x; 2y)$; г) $(2x; \frac{1}{2}y)$; д) $(x; -y)$; е) $(-x; y)$; ж) $(x+1, y)$; з) $(x-1; y+1)$?

4. При некотором перемещении f точка A перешла в точку B, а точка B — в точку A. Докажите, что в результате композиции перемещений $f \circ f$ хотя бы одна из точек плоскости перейдет в себя.

Дополнительные задачи к § 38

1. а) Нарисуйте два равных круга. Постройте прямую, которая пересекает их по равным отрезкам. б) Основания двух равнобедренных треугольников находятся на одной прямой, а сами они с одной стороны от нее. Существует ли прямая, которая пересекает их по равным отрезкам? в) Оси симметрии равнобедренных треугольников находятся на одной прямой. Существуют ли в них два параллельных и равных отрезка?

2. Нарисуйте образ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в результате переноса на вектор: а) $\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{DB_1}$.

3. Нарисуйте образ правильного тетраэдра $PABC$ в результате переноса на вектор: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{CP}$; в) $\overrightarrow{AK}$, где K — середина BC; г) $\overrightarrow{PQ}$, где Q — центр треугольника.

4. Два прямолинейных шоссе пересекаются за пределами карты. Вы стоите в пределах карты. Вам нужно узнать: а) расстояние до их пересечения; б) азимут на него. Сможете ли вы это сделать?

5. Может ли человек увидеть себя в карманном зеркале во весь рост?

6. Нарисуйте правильный тетраэдр. Нарисуйте его образ, полученный в результате центральной симметрии, относительно: а) вершины; б) середины ребра; в) центра основания.

7. Нарисуйте куб. Нарисуйте его образ, полученный в результате центральной симметрии, относительно: а) вершины; б) центра верхнего основания; в) середины ребра.

8. а) Федя нарисовал равносторонний треугольник. На каждой его стороне он построил квадраты вне этого треугольника, а затем он построил их центры. Вася стер этот рисунок, оставив только эти центры. Можно ли восстановить исходный рисунок? б) А если исходный треугольник будет произвольным?

Дополнительные задачи к § 39

1. Равносторонний треугольник определим как треугольник с тремя осями симметрии, равнобедренный — как треугольник с одной осью симметрии, равнобедренную трапецию — как трапецию с одной осью симметрии. Выведите отсюда известные свойства этих фигур.

2. Определим параллелограмм как четырехугольник с центром симметрии; ромб как параллелограмм, у которого диагонали являются осями симметрии; прямоугольник как параллелограмм, у которого средние линии являются осями симметрии. Выведите из такого определения известные свойства этих фигур. Дайте аналогичное определение квадрату. Подумайте, можно ли в этом определении ромба и прямоугольника не указывать, что это параллелограмм.

5. Дан правильный пятиугольник. В нем проведены все диагонали. Найдите среди полученных точек пересечения вершины правильного пятиугольника. Обобщите этот результат.

6. Укажите множество симметрий таких фигур: а) отрезок; б) прямая; в) два параллельных и равных отрезка; г) две пересекающиеся прямые; д) две параллельные прямые; е) полоса; ж) равнобедренный треугольник; з) ромб; и) прямоугольник; к) равнобедренная трапеция.

7. Какими перемещениями самосовмещается: а) окружность с выколотой точкой; б) окружность с двумя выколотыми точками; в) окружность с тремя выколотыми точками; г) два равносторонних треугольника с общей вершиной; д) два равносторонних треугольника с общей стороной; е) два равносторонних треугольника с общим центром?

8. Разделите на две равные части, желательно большим числом способов: а) квадрат; б) круг.

Дополнительные задачи к § 40

1. а) Средняя линия прямоугольника отсекла от него прямоугольник, подобный данному. Какой зависимостью связаны его стороны? б) Одна средняя линия отсекла от прямоугольника подобный ему прямоугольник. Будет ли другая средняя линия обладать таким же свойством?

2. Первая система стандартизации в книгоиздательстве исходила из двух принципов. Первый принцип — геометрическое подобие. Согласно ему формат бумаги и его части должны быть подобны при делении их пополам. Второй принцип — площадь основного листа должна быть равна 1 $м^2$. Исходя из этих принципов были получены размеры основного формата в форме прямоугольника. Каковы его размеры?

3. Нарисуйте параллелограмм. Через внутреннюю точку его диагонали проведите прямые, параллельные его сторонам. Есть ли на полученном рисунке подобные параллелограммы?

4. Нарисуйте трапецию. Проведите прямую, параллельную основаниям, так, чтобы она рассекла ее на две подобные трапеции. Пусть известны стороны трапеции. Как найти длину отрезка этой прямой, лежащего внутри трапеции?

5. Вы смотрите в бинокль на некоторый объект. Подобны ли объект и то, что вы видите?

6. Постройте треугольник по двум углам и: а) высоте из вершины третьего угла; б) медиане из вершины третьего угла; в) биссектрисе из вершины третьего угла; г) периметру; д) радиусу описанной окружности; е) радиусу вписанной окружности.

7. Постройте: а) квадрат наибольшей площади, расположенный в данном равностороннем треугольнике; б) равносторонний треугольник наибольшей площади, расположенный в данном равнобедренном треугольнике. Найдите отношение площадей построенной фигуры и данной

8. Используя гомотетию, докажите, что: а) средняя линия параллельна стороне треугольника и равна ее половине; б) три медианы треугольника пересекаются в одной точке; в) точка пересечения диагоналей трапеции лежит на средней линии ее оснований; г) точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежит на продолжении средней линии оснований; д) точка пересечения диагоналей трапеции лежит на прямой, соединяющей точки касания вписанной в эту трапецию окружности, лежащие на ее боковых сторонах.

ОТВЕТЫ

§ 29. 5. а) $\frac{2\sqrt{3}}{6}$; б) $2\sqrt{2}$. 8. а) $\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{2}$; в) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{2}$; г) $-\sqrt{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; д) $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-3\sqrt{2}$; е) $-\sqrt{3}-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. 9. а) $-\frac{1}{2}$; б) 0; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 13. в) $(\alpha x_1+\beta x_2,\ \alpha y_1+\beta y_2)$ 16. а) 1; 90°; б) 2; 0°; в) $\sqrt{10}$; $\cos\varphi=-\frac{3}{\sqrt{10}}$; г) $\sqrt{13}$; $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{13}}$. 27. в) $(0, 4)$. 33. а) $\sqrt{2}$; б) $\cos\varphi=-\frac{7}{\sqrt{65}}$. 34. а) $\sqrt{17}$; б) $\sqrt{5}$; в) $4\sqrt{2}$; г) $\sqrt{5}$. 36. а) $(-2,\ 2)$, б) $(\pm\sqrt{7}-2, 0)$; в) $(0, \pm\sqrt{21}+3)$.

§ 32. 2. а) $\frac{\sqrt{35}}{2}$, $\cos\varphi=\frac{17}{18}$; б) $\sqrt{8}$, $\cos\varphi=\frac{7}{9}$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\varphi=60°$ 3. а) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. 5. а) $4\cos\varphi$. 13. $\frac{\varphi}{2}$. 14. а) $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}-1, 45°$. 15. Если $\varphi=30°$, то $1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 16. а) $180°-\varphi$. 23. В одном из случаев $R-\sqrt{R^2-\left(\frac{d^2}{4}\right)}$.

§ 33. 12. $\frac{1}{2}$. 15. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, б) 1; в) $\frac{4}{5}$, г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $2\sin\varphi\cos\varphi$. 17. а) $\frac{9\sqrt{2}}{8}$, б) $\frac{1}{2}$; в) 4; г) 2, д) $\frac{\sqrt{\frac{2S}{\sin 2\varphi}}}{2\sin\varphi}$. 18. а) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; б) $2+\frac{\sqrt{3}}{4}$; в) 1; е) $\frac{\sin^2\varphi}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$.

§ 35. 2. а) $\frac{1}{2}$. 3. а) $\pi\sqrt{d_1^2+d_2^2}$; б) $\frac{\pi d}{\sin\varphi}$; в) $\frac{\pi d}{\cos\frac{\varphi}{2}}$; г) $\frac{2\pi d_1 d_2^2}{\sqrt{4d_2^2-d_1^2}}$. 4. а) $\frac{\pi}{1+\sqrt{2}}$; б) $\frac{2\pi d\sin\varphi\cos\varphi}{1+\cos\varphi+\sin\varphi}$; в) $\frac{2\pi\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$; г) $\pi d\operatorname{tg}\left(45°-\frac{\varphi}{4}\right)$ 13. $\varphi=360°\cdot\frac{L_1}{L}$. 14. а) $L\cdot\frac{360°}{\varphi}$.

§ 36. 6. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi d^2}{4\cos^2\varphi}$; г) π; д) $\frac{\pi(d_2^2+4d_1^2)}{64d_1^2}$. 7. а) $\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{\pi}{(2+\sqrt{2})^2}$; в) $\frac{\pi d^2\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi+\sin\varphi)^2}$; г) $\frac{3\pi}{4(2+\sqrt{3})^2}$; д) $\pi\left(\frac{d_1 d_2}{d_2+\sqrt{d_2^2+4d_1^2}}\right)^2$; е) $\frac{\pi d^2}{4}$. 8. а) $\frac{\pi}{4}$. 9. а) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. 16. г) $R=2$, $\varphi=90°$; д) $R=2$.

§ 38. 6. а) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{\frac{7}{3}}$. 7. 1) а) $(-7,\ 3)$. 12. а) $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 13. а) $S=1\frac{3}{4}$ 14. а) $S=58{,}5$. 15. В одном из случаев $S=d^2(2-\cos\varphi)\sin\varphi$. 20. 7. 21. а) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. 22. г) $\frac{10\sqrt{3}}{9}$. 23. $\frac{64}{3}\pi+8\sqrt{3}$. 28. в) $(3-\sqrt{2})S$. 29. $2d_1d_2-d_1^2$. 30. в) $1{,}5\ S$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Александр Данилович Александров,
Алексей Леонидович Вернер, Валерий Идельевич Рыжик

ГЕОМЕТРИЯ. Пробный учебник для 8 класса

Зав. редакцией *Р. А. Хабиб.* Редактор *Н. И. Никитина*
Младшие редакторы *Л. И. Заседателева, Л. Е. Козырева*
Художники *Б. Л. Николаев, Е. П. Титков.* Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Редактор карт *Н. В. Заболотная*
Технический редактор *Н. А. Киселева*
Корректоры *Л. А. Ежова, Н. В. Красильникова*

ИБ № 9326

Сдано в набор 10 11 85 Подписано к печати 19 04 86 Бум офсетная № 2 Гарнит литер Печать офсетная Усл печ л 12 Усл кр отт 12,25 Уч-изд л 10,23 Тираж 46 000 Заказ № 245 Цена 15 коп
Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 129846, Москва, 3 й проезд Марьиной рощи, 41
Отпечатано с диапозитивов ордена Трудового Красного Знамени фабрики «Детская книга» № 1 Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 127018, Москва, Сущевский вал, 49 на Саратовском ордена Трудового Красного Знамени полиграфическом комбинате Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Саратов, ул Чернышевского, 59